Mathematik ohne Grenzen - Hauptwettbewerb 2021
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Die Vorspeisen* – 7 Punkte –

Laut Aufgabentext hat der Herr aus Brasilien einen elsässischen Salat bestellt und die Dame aus Deutschland einen Flammkuchen. Jede Vorspeise wurde von einem Mann und einer Frau bestellt. Für den Flammkuchen bleiben also noch der Schweizer und der Deutsche. Da Eheleute aber jeweils unterschiedliche Vorspeisen gewählt haben und die Dame aus Deutschland bereits einen Flammkuchen bestellt hat, hat ihr Mann keinen bestellt. Somit hat der Herr aus der Schweiz den Flammkuchen bestellt. Die Schnecken hat damit der Herr aus Deutschland bestellt. Bleiben noch Salat und Schnecken für die Brasilianerin und die Schweizerin. Da der Herr aus Brasilien einen Salat bestellt hat, hat seine Frau keinen bestellt und somit die Schnecken gewählt. Daher hat die Dame aus der Schweiz den Salat bestellt.

Bei der Lösung der Aufgabe kann eine Tabelle helfen.

	Herr	**Dame**
Brasilien	Salat	Schnecken
Schweiz	Flammkuchen	Salat
Deutschland	Schnecken	Flammkuchen

Aufgabe 2 – *Die Daltons* – 5 Punkte –

Die Aufgabe lässt sich mit Hilfe einer Tabelle lösen. a, b und c sind die verschiedenen Ziffern, in aufsteigender Reihenfolge angeordnet.
In den drei rechten Spalten sind die Möglichkeiten dargestellt, jeweils zwei Ziffern zu multiplizieren und die dritte zu addieren.

a	b	c	ab+c	ac+b	bc+a
1	8	9	8 + 9 = 17	9 + 8 = 17	72 + 1 = 73
2	7	9	14 + 9 = 23	$18 + 7 = 25 = 5^2$	63 + 2 = 65
3	6	9	18 + 9 = 27	27 + 6 = 33	54 + 3 = 57
3	7	8	21 + 9 = 29	24 + 7 = 31	56 + 3 = 59
4	5	9	20 + 9 = 29	36 + 5 = 41	$45 + 4 = 49 = 7^2$
4	6	8	24 + 8 = 32	32 + 6 = 38	48 + 4 = 52
5	6	7	30 + 7 = 37	35 + 6 = 41	42 + 5 = 47

Man erhält die beiden Lösungen **a = 2, b = 7, c = 9** und **a = 4, b = 5, c = 9.**

Aus den Hinweisen ergeben sich zwei mögliche Zahlenkombinationen: 279 und 459.

Aufgabe 3 – *Glücklich und fröhlich* – 7 Punkte –

Für den ersten Aufgabenteil muss der Algorithmus für die Zahlen 1-20 durchgeführt werden.

<u>Bemerkung:</u> Um sich die Rechnungen zu erleichtern, kann man Zwischenergebnisse notieren, die nicht auf die Zahl 1 führen (z. Bsp. 29 und 89) und die Rechnung abbrechen, sobald diese Ergebnisse wieder auftreten.

Die fünf „glücklichen Zahlen“ kleiner als 20 sind 1, 7, 10, 13 und 19.

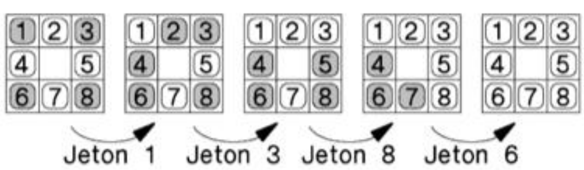
Für 2021 erhält man: $2^2 + 0^2 + 2^2 + 1^2 = 9$. Laut Aufgabenteil 1 ist 9 aber keine „glückliche Zahl“.

Thomas hat nicht Recht. 2021 ist kein „glückliches Jahr“.

Hier die Rechnungen für die folgenden Jahre:
2022: $2^2+ 0^2+ 2^2+ 2^2= 12$ -> *keine „glückliche Zahl“ laut Aufgabenteil 1*
2023: $2^2+ 0^2+ 2^2+3^2= 17$ -> *keine „glückliche Zahl“ laut Aufgabenteil 1*
2024: $2^2+ 0^2+ 2^2+ 4^2= 24$; $2^2+ 4^2= 20$; $2^2+ 0^2= 4$ -> *keine „glückliche Zahl“ laut Aufgabenteil 1*
2025: $2^2+ 0^2+ 2^2+ 5^2= 33$; $3^2+ 3^2= 18$ -> *keine „glückliche Zahl“ laut Aufgabenteil 1*
2026: $2^2+ 0^2+ 2^2+ 6^2= 44$; $4^2 + 4^2 = 32$; $3^2+ 2^2=13$ -> *„glückliche Zahl“ laut Aufgabenteil 1*

Das Jahr 2026 ist das nächste „glückliche Jahr“.

Aufgabe 4 – *Ganz in weiß* – 5 Punkte –



Man kann das Spiel in vier Spielzügen gewinnen, indem man jeden Eckstein einmal umdreht.
Dadurch wird jeder Stein in der Mitte zweimal umgedreht, und die weiße Seite liegt wieder oben.

In der hier dargestellten Lösung werden nacheinander die Steine 1, 3, 8 und 6 umgedreht.

Aufgabe 5 – *Längs und quer* – 7 Punkte –

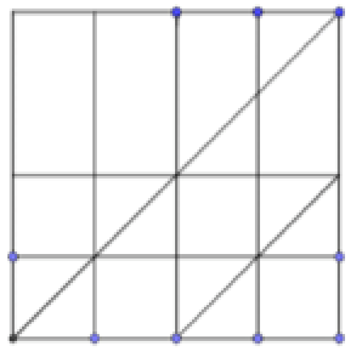
Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a beträgt $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Wenn man das Blatt längs faltet, hat das Prisma das Volumen $V_1 = \frac{7^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 30}{4} = \frac{735\sqrt{3}}{2}$.

Wenn man das Blatt quer faltet, hat das Prisma das Volumen $V_2 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 21}{4} = 525\sqrt{3}$.

Wenn man das Blatt quer faltet, hat das entsprechende Prisma das größere Volumen.

Verhältnis: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{735}{1\,050} = \frac{7}{10}$



Aufgabe 6 – *Quadratische Überdeckung* – 5 Punkte –

Die Schülerinnen und Schüler können die Quadrate ausschneiden und sie dann übereinanderlegen, um eine Vorstellung von der Figur zu bekommen.

Das Quadrat wird in **18 Bereiche** unterteilt.

Aufgabe 7 – *Heimwerken* – 7 Punkte –

Die Gesamthöhe aller Teile des Baumstamms beträgt 350 cm. Die Anzahl der Stützen ist also ein Teiler von 350.

- 350 ist teilbar durch 2, aber zwei Stützen von je 175 cm Höhe können mit den gegebenen Teilen nicht gebaut werden, weil die Höhen aller Teile durch 10 teilbar sind.
- 350 ist nicht teilbar durch 3, 4 oder 6.
- 350 ist teilbar durch 5, und 5 Stützen der Höhe 70 cm können mit den gegebenen Teilen gebaut werden.
- 350 ist teilbar durch 7, aber bei Stützen der Höhe 50 cm könnte das Baumstamm-Teil der Höhe 60 cm nicht verwendet werden.
  Dasselbe gilt für alle Teiler von 350, die größer sind als 7.

Als einzige Lösung erhält man daher **5 Stützen der Höhe 70 cm.**

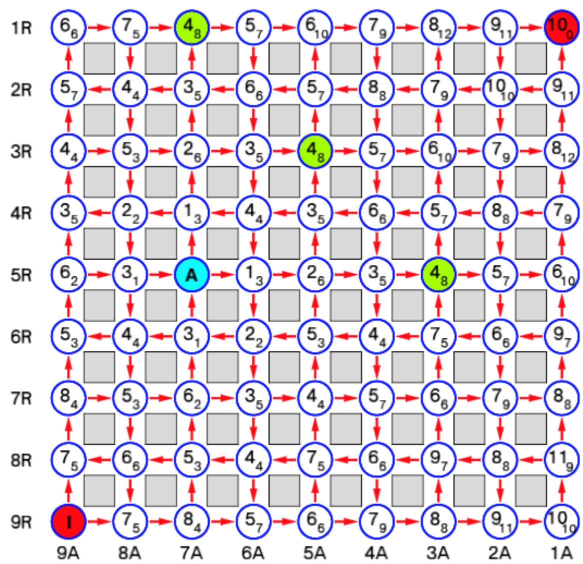
Im Folgenden die Höhen der für die Stützen verwendeten Teile des Baumstamms:

- **60 cm und 10 cm**
- **50 cm und 20 cm**
- **40 cm und 30 cm,**
- **30 cm, 30 cm und 10 cm**
- **20 cm, 20 cm und 30 cm**

Aufgabe 8 – *Mickey moves* – 5 Punkte –

In der Zeichnung rechts wurde an jeder Kreuzung die Länge des Hinwegs vom Punkt A und die Länge des Rückwegs zum Punkt A notiert (in 100m – Schritten).

Mickeys neue Wohnung könnte an den Punkten (7A / 1R), (5A / 3R) und (3A / 5R) liegen.



Aufgabe 9 – *Malotterie* – 7 Punkte –

Wenn man das Los mit der Nummer 908 umdreht, liest man die Nummer 806 (und umgekehrt).
Die Ziffern 0 und 8 bleiben beim Umdrehen unverändert. Die 6 wird zur 9 und umgekehrt. Alle anderen Ziffern sind unproblematisch.
Man muss also punktsymmetrische Zahlen bestimmen, die aus den Ziffern 0, 6, 8 und 9 bestehen.
Man findet ein Paar von Zahlen mit einer Ziffer, drei Paare von Zahlen mit zwei Ziffern und 15 Paare von Zahlen mit drei Ziffern.

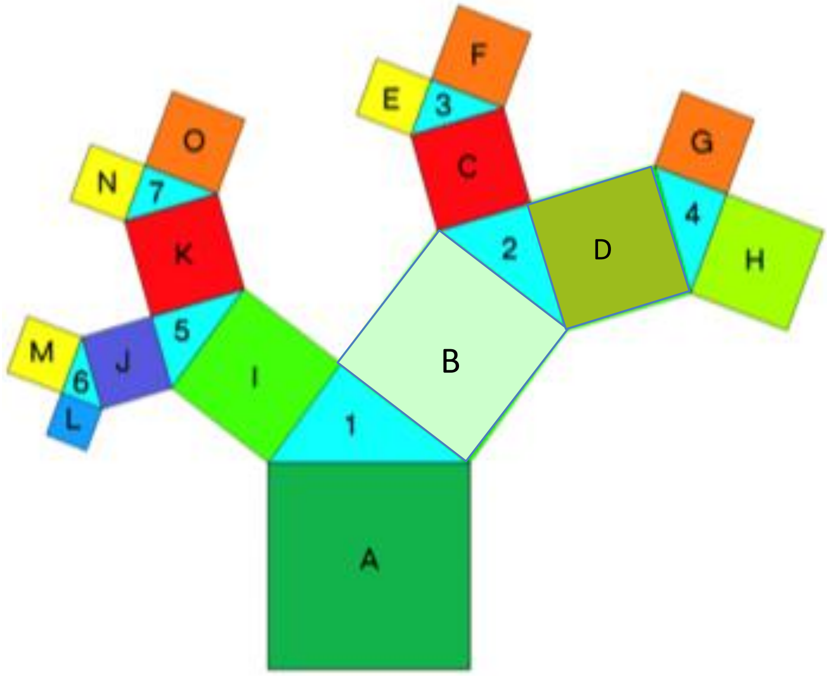
Die problematischen Lose sind:
- 6 und 9
- 66 und 99 ; 68 und 89 ; 86 und 98
- 606 und 909 ; 608 und 809 ; 666 und 999 ; 668 und 899 ; 669 und 699 ; 686 und 989 ; 688 und 889 ; 696 und 969 ;
- 698 und 869 ; 806 und 908 ; 866 und 998 ; 868 und 898 ; 886 und 988 ; 896 und 968 ; 966 und 996.

Aufgabe 10 – *Cactus fractalus* – 10 Punkte –

Die Seitenlängen der Quadrats A, B und I betragen 5 cm, 4 cm und 3 cm.
Ihre Flächeninhalte betragen daher 25 cm², 16 cm² und 9 cm².

Alle Dreiecke sind ähnlich.
Bei „Verästelungen nach links“ beträgt der Verkleinerungsfaktor $\frac{3}{5}$,
bei „Verästelungen nach rechts“ beträgt er $\frac{4}{5}$.
Für die Flächen gelten daher die Verkleinerungsfaktoren $\frac{9}{25}$ und $\frac{16}{25}$.

Im Anhang befindet sich eine Zeichnung im angegebenen Maßstab.



Hier die Seitenlängen der verschiedenen Dreiecke:

Dreieck	1	2	3	4	5	6	7
Hypotenuse	5 cm	4 cm	2,4 cm	3,2 cm	3 cm	1,8 cm	2,4 cm
längere Kathete	4 cm	3,2 cm	1,92 cm	2,56 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm
kürzere Kathete	3 cm	2,4 cm	1,44 cm	1,92 cm	1,8 cm	1,08 cm	1,44 cm

Flächeninhalt der Quadrate:
Quadrat A: 25 cm^2 Quadrat B: 16 cm^2 Quadrat I: 9 cm^2 Quadrat D: 10,24 cm^2
Quadrat H: 6,5536 cm^2 Quadrat J: 3,24 cm^2 Quadrat L: 1,1664 cm^2

Die Quadrates K und C haben denselben Flächeninhalt: 5,76 cm^2
Die Quadrates O, F und G haben denselben Flächeninhalt: 3,6864 cm^2
Die Quadrates M, N und E haben denselben Flächeninhalt: 2,0736 cm^2

Klasse 10

Aufgabe 11 – *Passt!* – 5 Punkte –

Sei x die Anzahl der 20-Cent-Briefmarken. Die Anzahl der 10-Cent-Briefmarken ist dann 10x.
Sei y die Anzahl der 50-Cent-Briefmarken.
Man erhält die Gleichung $20\,x + 10 \cdot 10\,x + 50\,y = 1\,000$

$$120\,x + 50\,y = 1\,000$$

$$12\,x + 5\,y = 100$$

Die ganzzahligen Lösungen sind $x = 5$ und $y = 8$.

Charlotte bekommt 5 Briefmarken im Wert von 20 Cent, Briefmarken im Wert von 10 Cent und 8 Briefmarken im Wert von 50 Cent.

Aufgabe 12 – *Rund um die Insel* – 7 Punkte –

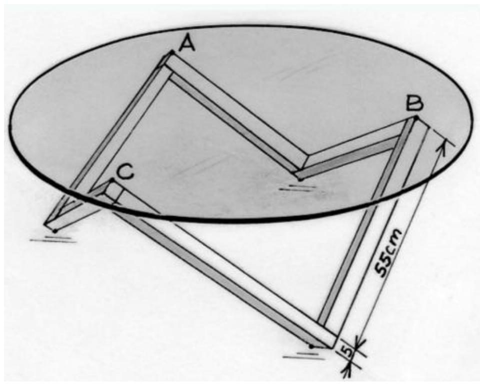
Amalio braucht 60 Minuten, um die Insel zu umrunden, Tissia 10.

Wenn Amalio die Insel einmal umrundet hat, hat Tissia 6 Runden gedreht.

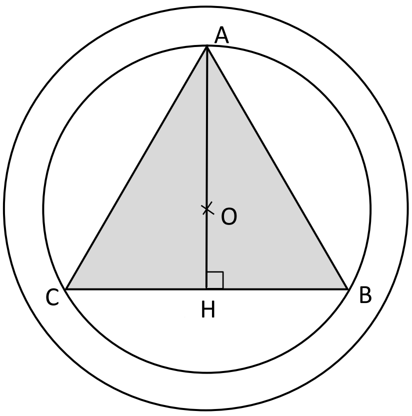
In den ersten 60 Minuten hat Tissia Amalio 5 Mal überholt.
Tissia wird Amalio dann 10 + 10 : 5 = 12 Minuten später zum nächsten Mal überholen.

Tissia wird Amalio 12 Minuten später zum nächsten Mal überholen.

Aufgabe 13 – *Der Couchtisch* – 10 Punkte –



Alle Holzleisten sind gleich lang und stehen paarweise senkrecht aufeinander. Nach dem Kongruenzsatz sws sind die Seiten AB, BC und AC die Hypotenusen in kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken und damit gleich lang.
Das Dreieck ABC ist gleichseitig.



AB = BC = CA = $55\sqrt{2}$

OA ist der Radius des Umkreises: $OA = \frac{2}{3}\,AH$

AH ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck ABC: $AH = \frac{55\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \quad OA = \frac{55\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{55\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Radius r der Glasplatte: $r = \frac{55\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 10 \approx 54{,}9$

Der Radius der Glasplatte beträgt ungefähr $54{,}9$ cm

<u>**Bemerkung:**</u> *Die Länge der Strecke OA kann auch mit Hilfe der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck AOM bestimmt werden, wobei M der Mittelpunkt der Strecke AB ist.*

Anhang