Mathematik ohne Grenzen - Hauptwettbewerb 2022
Lösungen

Aufgabe 1 – *In welcher Hand?* – 7 Punkte –

Sei l die Anzahl der Münzen in der linken Hand und r die Anzahl der Münzen in der rechten Hand.

- Wenn l ungerade ist und r gerade, dann ist auch 3l ungerade und 2r gerade, und damit ist 3l + 2r ungerade.
- Wenn l gerade ist und r ungerade, dann sind sowohl 3l als auch 2r gerade, und damit ist 3l + 2r gerade.

Wenn die Summe ungerade ist, befindet sich die gerade Anzahl Münzen in der rechten Hand.
Wenn die Summe gerade ist, befindet sich die gerade Anzahl Münzen in der linken Hand.

Aufgabe 2 – *Quadrate im Quadrat* – 5 Punkte –

Die beiden ersten Ziffern können 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein.
Die beiden letzten Ziffern können 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64 oder 81 sein.
Entweder man sucht unter den 54 möglichen Kombinationen die gesuchte Quadratzahl, oder man testet, welche vierstellige Quadratzahl aus zwei Quadratzahlen zusammengesetzt ist, die beide nicht 0 sind. So sieht man schnell, dass man erst bei $40^2 = 1600$ anfangen muss, zu testen. Die gesuchte Zahl ist dann schon $41^2 = 1681$.
Die Lösung ist eindeutig.

Die gesuchte Zahl ist 1681 = 41^2.

Aufgabe 3 – *Dreiecke würfeln* – 7 Punkte –

Mit den drei gewürfelten Zahlen kann ein Dreieck konstruiert werden, wenn jede Zahl kleiner ist als die Summe der beiden anderen Zahlen (Dreiecksungleichung).

- Wenn der erste Würfel eine 1 zeigt, gibt es 6 Möglichkeiten, zu gewinnen (von insgesamt 36 Möglichkeiten):
  (1 ; 1 ; 1) ; (1 ; 2 ; 2) ; (1 ; 3 ; 3) ; (1 ; 4 ; 4) ; (1 ; 5 ; 5) et (1 ; 6 ; 6).
  Bemerkung: Es ergeben sich dabei immer gleichschenklige Dreiecke, deren Basis 1 cm lang ist.
  Wenn bereits eine 1 gewürfelt wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit, noch zu gewinnen, $\mathbf{\frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$**.**

- Wenn der erste Würfel eine 4 zeigt, gibt es 24 Möglichkeiten, zu gewinnen:
  (4 ; 1 ; 4) ; (4 ; 2 ; 3) ; (4 ; 2 ; 4) ; (4 ; 2 ; 5)
  (4 ; 3 ; 2) ; (4 ; 3 ; 3) ; (4 ; 3 ; 4) ; (4 ; 3 ; 5) ; (4 ; 3 ; 6) ;
  (4 ; 4 ; 1) ; (4 ; 4 ; 2) ; (4 ; 4 ; 3) ; (4 ; 4 ; 4) ; (4 ; 4 ; 5) ; (4 ; 4 ; 6)
  (4 ; 5 ; 2) ; (4 ; 5 ; 3) ; (4 ; 5 ; 4) ; (4 ; 5 ; 5) ; (4 ; 5 ; 6)
  (4 ; 6 ; 3) ; (4 ; 6 ; 4) ; (4 ; 6 ; 5) ; (4 ; 6 ; 6)
  Wenn bereits eine 4 gewürfelt wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit, noch zu gewinnen, $\mathbf{\frac{24}{36} = \frac{2}{3}}$**.**

Aufgabe 4 – *Im Schnitt* – 5 Punkte –

Sei s die Länge des Hinwegs (und des Rückwegs) in km, t die Zeit in Stunden, die Theo für den Hinweg gebraucht hat, und t’ die Zeit in Stunden, die Theo für den Rückweg gebraucht hat.
Es gilt $\frac{s}{t} = 6\ [\frac{km}{h}]$ und $\frac{s}{t'} = 14\ [\frac{km}{h}]$
Die gesamte Strecke (Hin- und Rückweg) beträgt 2s, und die Zeit, die Theo dafür benötigt, beträgt t + t’.
Für die Durchschnittsgeschwindigkeit v gilt also:

$$v = \frac{2s}{t+t'} = \frac{2s}{\frac{s}{6} + \frac{s}{14}} = \frac{2s}{\frac{7s+3s}{42}} = \frac{84s}{10s} = 8{,}4\ \left[\frac{km}{h}\right]$$

Theos Durchschnittsgeschwindigkeit für die gesamte Strecke beträgt 8,4 km/h.

Aufgabe 5 – *Treppenlauf* – 7 Punkte –

Sei x die Anzahl der Schritte, die Mickaël zählt, bis er stehenbleibt. Als Laure ankommt, hat sie $x + 250$ Schritte gemacht.
Die Anzahl z der Stufen, die beide bis dahin bewältigt haben, lässt sich schreiben als $z = 3x = 2(x + 250)$.
Die Lösung der Gleichung $3x = 2(x + 250)$ ist $x = 500$. Damit ist $z = 1500$.

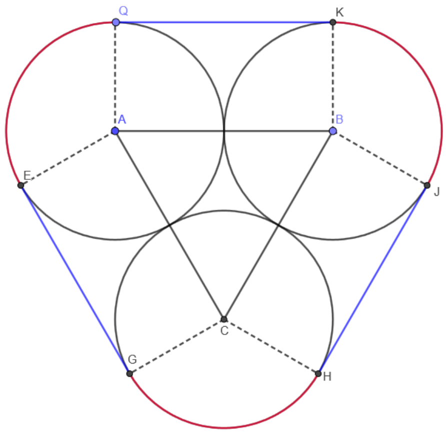
Laure und Mickaël haben schon 1500 Stufen bewältigt.

Aufgabe 6 – *Voll vertippt* – 5 Punkte –

Da das Komma nicht getippt wurde, hat François hundert Mal so viel bezahlt, wie er eigentlich hätte zahlen sollen.
Die 1 826,55 €, die er zu viel bezahlt hat, sind also das 99-fache des eigentlichen Preises.
François hätte 1 826,55€ : 99 = 18,45 € bezahlen sollen.

Der Kassierer hätte eigentlich 18,45 € eintippen sollen.

Aufgabe 7 – *Im Dreierpack*– 7 Punkte –



Länge der Schnur:

Die Länge der drei roten Kreisbögen beträgt jeweils ein Drittel des Umfangs des gesamten Kreises mit dem Radius 3 cm: $\frac{2\pi \times 3}{3} = 2\pi\ [\mathrm{cm}]$
Jede blaue Strecke ist doppelt so lang wie der Radius 3 cm: 6 cm.
Gesamtlänge der Schnur: $6\pi + 18 + 20 = 38 + 6\pi\ [\mathrm{cm}] \approx 57$ cm

Die minimale Länge einer Schnur beträgt etwa 57 cm.

Aufgabe 8 – *Auf die Plätze!* – 5 Punkte –

Die Startlinien der Läufer sind versetzt, weil ihre Laufstrecken bis zur Ziel-Linie sonst nicht gleich lang wären, denn die Halbkreise in ihren Laufbahnen haben unterschiedliche Radien.

$$a = \pi \times r_B - \pi \times r_A = \pi \times (r_B - r_A) = \pi \times 1{,}2\,m \approx 3{,}77\,m$$
$$b = \pi \times (r_c - r_B) = \pi \times 1{,}2\,m \approx 3{,}77\,m$$

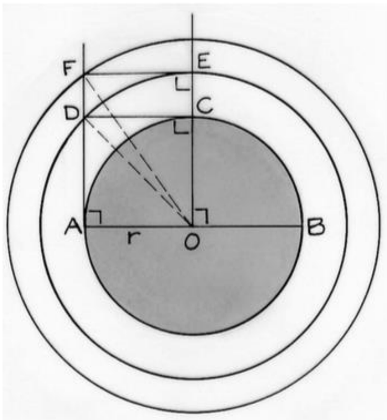
Zwischen den Startlinien der Läufer liegen jeweils 3,77 m.

Aufgabe 9 – *In jeder Richtung* – 7 Punkte –

Es gilt:
$4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a \quad (1)$
Die Ziffer a kann nur 1 oder 2 sein, denn sonst wäre 4 $abcd$ größer als 10 000.
Außerdem ist a gerade, denn a ist die Einerziffer der durch 4 teilbaren Zahl $dcba$. Also ist $\boldsymbol{a = 2}$.
Die Vielfachen $4d$ von 4 mit der Einerziffer 2 sind 4 x 3 = 12 oder 4 x 8 = 32 (für natürliche Zahlen d < 10) , daher ist $d = 3$ oder $d = 8$.
$a = 2$ und $d = 3$ ist aber nicht möglich, denn das Vierfache $dcba$ der Zahl $abcd$ mit der Tausenderziffer a = 2 kann nicht die Tausenderziffer $d = 3$ haben. Daher ist $\boldsymbol{a = 2}$ und $\boldsymbol{d = 8}$.
Einsetzen in (1) liefert: $4(2\,000 + 100b + 10c + 8) = 8\,000 + 100c + 10b + 2$
$$400b + 40c + 32 = 100c + 10b + 2$$
$$390b + 30 = 60c$$
$$13b + 1 = 2c$$
Da b und c Ziffern sind, also nur ganzzahlige Werte zwischen 0 und 9 annehmen können, ist die einzige Lösung dieser Gleichung $\boldsymbol{b = 1}$ und $\boldsymbol{c = 7}$.
Die Zahl $abcd$, die multipliziert mit 4 $dcba$ ergibt, ist 2178.

Mathématiques SANS Frontières

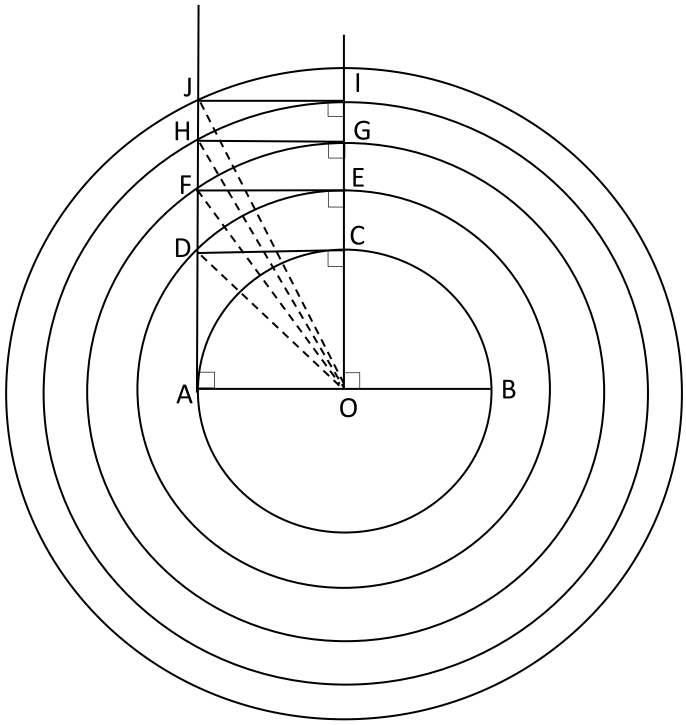
Aufgabe 10 – *Doppelt und dreifach…* – 10 Punkte –



Der graue Ausgangskreis mit dem Radius r hat den Flächeninhalt πr^2.

Kreis um O durch D:
Den Radius OD kann man mit Pythagoras berechnen:
$OD^2 = OA^2 + OC^2 = r^2 + r^2 = 2\ r^2$, also $OD = \sqrt{2}\ r$
Der Kreis mit dem Radius OD hat den Flächeninhalt $\pi(\sqrt{2}r)^2 = 2\pi r^2$.
Das ist der doppelte Flächeninhalt des Ausgangskreises.

Kreis um O durch F:
Es gilt $OF^2 = FE^2 + OE^2 = OA^2 + OD^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$, also $OF = \sqrt{3}\ r$.
Der Kreis mit dem Radius OF hat den Flächeninhalt $\pi(\sqrt{3}r)^2 = 3\pi r^2$.
Das ist der dreifache Flächeninhalt des Ausgangskreises.



Vervierfachen der Fläche des Ausgangskreises
Der Punkt G ist der Schnittpunkt der Geraden durch O, C und E mit dem Kreis um O durch F.
Zeichne eine Senkrechte zur Geraden durch O, C und E durch den Punkt G. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Geraden durch A, D und F ist der Punkt H. Die Länge der Strecke OH ist der Radius des gesuchten Kreises.

Verfünffachen der Fläche des Ausgangskreises
Wie oben: Der Punkt I ist der Schnittpunkt der Geraden durch O und E mit dem Kreis um O durch H.
Zeichne eine Senkrechte zur Geraden durch O und E durch den Punkt I. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Geraden durch A und F ist der Punkt J. Die Länge der Strecke OJ ist der Radius des gesuchten Kreises.
.

Aufgabe 11 – *Pause!* – 5 Punkte

Die erste Ziffer bei einer digitalen Zeitanzeige kann 0, 1 oder 2 sein. Daher sind die vier aufeinanderfolgenden Ziffern entweder 0 1 2 3 oder 1 2 3 4 oder 2 3 4 5.

Daraus ergeben sich 30 verschiedene Uhrzeiten:

0 1 2 3

01.23	02.13	03.12
01.32	02.31	03.21
10.23	12.03	13.02
10.32	12.30	13.20
20.13	21.03	23.01
20.31	21.30	23.10

1 2 3 4

12.34	13.24	14.23
12.43	13.42	14.32
21.34	23.14	
21.43	23.41	

2 3 4 5

23.45
23.54

Wenn eine Uhrzeit mit der Ziffer 1 endet, dann endet die 35 Minuten spätere Uhrzeit mit der Ziffer 6. Wenn eine Uhrzeit mit den Ziffern 2, 3 oder 4 endet, dann endet die 35 Minuten spätere Uhrzeit mit den Ziffern 7, 8 oder 9.
All diese Uhrzeiten können also ausgeschlossen werden, und es bleiben nur die Uhrzeiten mit den Endziffern 0 und 5 übrig (oben in rot eingetragen).
Nur zwei Uhrzeiten liegen genau 35 Minuten auseinander: 23.10 Uhr und 23.45 Uhr.
Élios Pause hat um 23.10 Uhr begonnen und war um 23.45 Uhr zu Ende.

Aufgabe 12 – *Genau einen Meter entfernt* – 7 Punkte –

Der Körper besteht aus:

- Sieben Würfeln der Kantenlänge 1 m -> Volumen 7 m^3
- Zwölf Viertelzylindern mit Grundkreisradius 1 m und Höhe 1 m -> Volumen 3 π m^3 (Volumen von drei solchen Zylindern)
- Acht Achtelkugeln mit Radius 1 m -> Volumen $\frac{4}{3}\pi$ m^3

Volumen des gesamten Körpers: $7 + 3\pi + \frac{4}{3}\pi = 7 + \frac{13}{3}\pi$ [m^3]

Das Volumen des Körpers beträgt $7 + \frac{13}{3}\pi \approx 20{,}614$ [m^3].

Aufgabe 13 – *Eislaufbahn* – 10 Punkte –

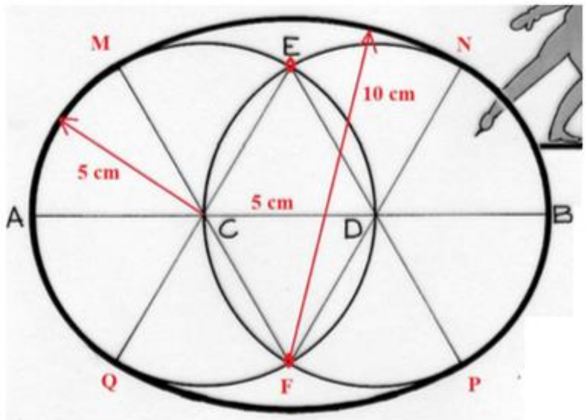
Zeichnung:

Im Maßstab 1 : 200 beträgt die Länge der Strecke AB 15 cm.

Die Länge der Strecke CD ist sowohl der Radius des Kreises um C als auch der Radius des Kreises um D. Daher teilen die Punkte C und D die Strecke AB in drei gleich große Teile der Länge 5 cm. Die Punkte E und F liegen auf den Kreisen um C und D. Daher sind die Strecken CE, DE, CF und DF auch 5 cm lang.

Zuerst konstruiert man die gleichseitigen Dreiecke CDE und CDF.

Die Kreisbögen durch die Punkte MN, NP, PQ und QM haben die jeweiligen Mittelpunkte F, D , E und C und die jeweiligen Radien 10 cm, 5 cm, 10 cm und 5 cm.
Eine maßstabsgetreue Zeichnung befindet sich im Anhang.



Länge der hölzernen Abtrennung:

In der Wirklichkeit haben die Kreise um C und D den Radius 10 m und die Kreise um E und F den Radius 20 m.

Der Winkel MFN beträgt 60°, denn er ist auch der Innenwinkel des gleichseitigen Dreiecks CFD.
Die Länge des Kreisbogens durch die Punkte M und N beträgt also ein Sechstel des Umfangs eines Kreises mit dem Radius 20 m: $\frac{40\pi}{6}$. Der Kreisbogen durch die Punkte Q und P ist genauso lang wie der Kreisbogen durch M und N.

Der Winkel MCQ beträgt 120° (Summe der Innenwinkel der gleichseitigen Dreiecke ACM und ACQ). Daher beträgt die Länge des Kreisbogens durch die Punkte P und Q ein Drittel des Umfangs eines Kreises mit Radius 10 m: $\frac{20\pi}{3}$
Der Kreisbogen durch die Punkte P und N ist genauso lang wie der Kreisbogen durch die Punkte M und Q.

Länge der Abtrennung: $2 \times \frac{40\pi}{6} + 2 \times \frac{20\pi}{3} = \frac{80\pi}{3} \approx$ 83,78 [m]

Die hölzerne Abtrennung ist ungefähr 83,78 m lang.

Anhang Aufgabe 13