Probewettbewerb 2024/ 2025
Lösungshinweise
Bewertungsvorschläge

Aufgabe 1 – *Ticktack* – 7 Punkte –

Jean setzt die neuen Batterien ein und stellt die Uhr auf 00 Uhr 00.
Er wandert bis zum Aussichtspunkt, notiert sich die Uhrzeit der Kirchturmuhr und läuft gleich darauf auf demselben Weg zurück zur Hütte.
In der Hütte angekommen liest er die Uhrzeit von der Wanduhr ab. So weiß er, wie lange er unterwegs war. Diese Zeit teilt er durch drei, da er für den Aufstieg doppelt so lange gebraucht hat wie für den Abstieg. Und dieses Ergebnis addiert er zu der Uhrzeit, die er vom Kirchturm abgelesen hat.

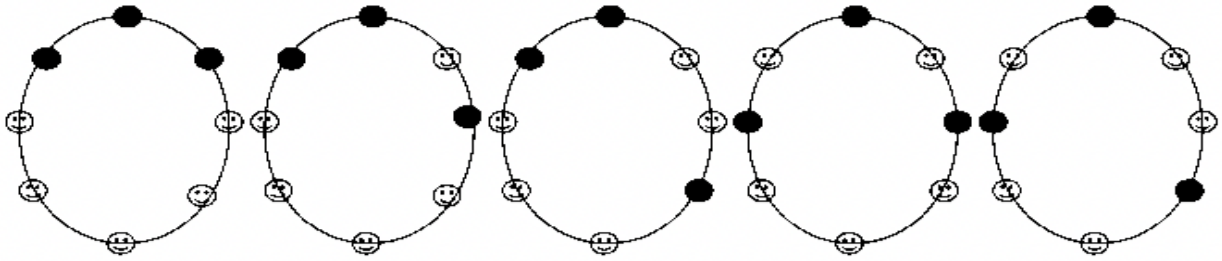
Bewertungsvorschlag
4 Punkte für eine Lösung mit Erklärung
3 Punkte für die sprachliche Qualität

Aufgabe 2 – *Kettenvariationen* – 5 Punkte –

Es genügt, die weißen Perlen zwischen den schwarzen zu zählen. Dabei gibt es fünf Möglichkeiten:

- 0; 0; 5 -> Die drei schwarzen Perlen liegen nebeneinander und die fünf weißen Perlen ebenso.
- 0; 1; 4 -> Zwei schwarze Perlen liegen nebeneinander. Eine schwarze Perle unterteilt die weißen Perlen in eine und vier.
- 0; 2; 3 -> Zwei schwarze Perlen liegen nebeneinander. Eine schwarze Perle unterteilt die weißen Perlen in zwei und drei.
- 1; 1; 3 -> Die drei schwarzen Perlen liegen nicht nebeneinander. Sie unterteilen die weißen Perlen in eine, eine und drei Perlen.
- 1; 2; 2 -> Die drei schwarzen Perlen liegen nicht nebeneinander. Sie unterteilen die weißen Perlen in eine, zwei und zwei Perlen.

Da man die Halsketten umdrehen kann, sind das alle Möglichkeiten.



Bewertungsvorschlag
1 Punkt pro Halskette

Aufgabe 3 – *Quadratzahlen?* – 7 Punkte –

Die erste eingetippte Ziffer wird mit n bezeichnet.
Da man jede der vier Tasten im Quadrat zuerst antippen kann, ergeben sich vier Möglichkeiten.

n	n + 1
n - 3	n - 2

n - 1	n
n - 4	n - 3

n + 2	n + 3
n - 1	n

n + 3	n + 4
n	n + 1

Anwendung der Teilbarkeitsregel bei jeder der vier Möglichkeiten:

$n – (n + 1) + (n – 2) – (n – 3) = n – n – 1 + n – 2 – n + 3 = 0$
$n - (n – 3) + (n – 4) - (n – 1) = n - n + 3 + n – 4 – n + 1 = 0$
$n – (n – 1) + (n + 2) - (n + 3) = n – n + 1 + n + 2 – n - 3 = 0$
$n – (n + 3) + (n + 4) – (n + 1) = n – n – 3 + n + 4 - n - 1 = 0$

-> Nach Anwendung der Teilbarkeitsregel sieht man, dass Laura Recht hat.

Bewertungsvorschlag
4 Punkte, wenn die Regel bei einem der vier möglichen Fälle richtig angewendet wurde
je 1 Punkt für die richtige Anwendung der Regel bei einem der drei weiteren Fälle
Teilpunkte für richtige Ansätze (z. Bsp. korrekte Belegung der Tasten mit Variablen)

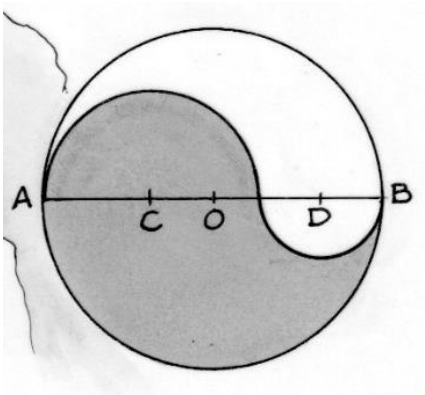
Aufgabe 4 – *Auf Kreisbögen* – 5 Punkte –

Die kleinen Kreise haben den Radius 1. Die Länge eines Kreisbogens (Halbkreis) beträgt π.
Der zweitkleinste Kreis hat den Radius 2. Die Länge eines Kreisbogens (Halbkreis) beträgt 2π.
Der zweitgrößte Kreis hat den Radius 3. Die Länge eines Kreisbogens (Halbkreis) beträgt 3π.
Der größte Kreis hat den Radius 6. Die Länge eines Kreisbogens (Halbkreis) beträgt 6π.

Entlang der Kreisbögen gibt es mehrere kürzeste Wege. Ihre Länge beträgt immer 6π.

Bewertungsvorschlag
2 Punkte für die vier verschiedenen Längen der Halbkreisbögen (je 0,5 P)
2 Punkte für die Erkenntnis, dass es mehrere kürzeste Wege gibt.
1 Punkte für die kürzeste Weglänge 6π

Aufgabe 5 – *Die dunkle Seite* – 7 Punkte -



Der Durchmesser der Kreisscheibe ist 1 m. Daher ist $\overline{OA} = \overline{OB} = 0{,}5$

Sei $\overline{AC} = r$. Dann ist $\overline{DB} = \frac{1-2r}{2} = 0{,}5 - r$

Inhalt der dunklen Fläche:

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{2} - \frac{\pi \cdot (0{,}5 - r)^2}{2} = \frac{\pi r^2 + \pi \cdot 0{,}5^2 - \pi \cdot 0{,}5^2 + \pi r - \pi r^2}{2} = \mathbf{0{,}5\,\pi r}$$

Inhalt der hellen Fläche: $\boldsymbol{\pi \cdot 0{,}5^2 - 0{,}5\,\pi r}$

(Inhalt der gesamten Fläche minus Inhalt der dunklen Fläche)

Der Inhalt der dunklen Fläche ist 1,5 mal so groß wie der Inhalt der hellen Fläche:

$$0{,}5\,\pi r = 1{,}5 \cdot (\pi \cdot 0{,}5^2 - 0{,}5\,\pi r)$$
$$0{,}5\,\pi r = 0{,}375\,\pi - 0{,}75\,\pi r \qquad | + 0{,}75\,\pi r$$
$$1{,}25\,\pi r = 0{,}375\,\pi \qquad | : 1{,}25\,\pi$$
$$r = 0{,}3$$

Der Radius AC beträgt 0,3 m.

Bewertungsvorschlag
2 Punkte für den Inhalt der dunklen Fläche
1 Punkt für den Inhalt der hellen Fläche
2 Punkt für den Radius AC.
2 Punkte für die Zeichnung

Aufgabe 6 – *Am Anfang wie am Ende* – 5 Punkte –

Am einfachsten ist es, wenn man die Aufgabe wie eine schriftliche Addition angeht.

$$\begin{array}{rcccccc} & 2 & a & b & c & d & e \\ + & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline = & a & b & c & d & e & 2 \end{array}$$

a, b, c, d und e sind Ziffern, also ganze Zahlen zwischen 0 und 9.

Einerstelle: 4 + e = 12 -> **e = 8**, Übertrag 1
Zehnerstelle: 1 + 1 + d = 8 -> **d = 6**
Hunderterstelle: 2 + c = 6 -> **c = 4**
Tausenderstelle: 1 + b = 4 -> **b = 3**
Zehntausenderstelle: 6 + a = 13 -> **a = 7**, Übertrag 1
Hunderttausenderstelle (zur Probe): 4 + 1 + 2 = 7 -> stimmt

Überprüfung : $\underline{2}73468 + 461214 = 7344682$

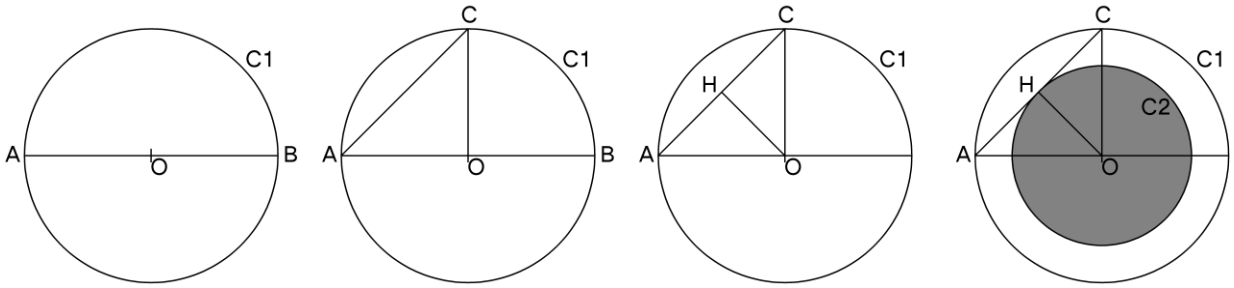
Die Ausgangszahl ist 273 468.

Bewertungsvorschlag
1 Punkt für jede Ziffer mit Erklärung

Aufgabe 7 – *Zielscheibe* – 7 Punkte –

Ein Vorschlag für eine Konstruktionsbeschreibung:

- Kreis um O mit Radius 10 cm (Maßstab 1 : 2) -> C_1
  Zeichne im Kreis einen Durchmesser AB ein.
- Zeichne die Orthogonale zur Strecke AB durch O. Zeichne den Schnittpunkt der Orthogonalen mit
- der Kreislinie ein -> Punkt C
- Zeichne die Strecke AC
- Zeichne die Orthogonale zur Strecke AC durch O.
- Kreis um O mit Radius $\overline{OH}$ -> C_2



Das Dreieck AOC ist gleichschenklig rechtwinklig. Die Basiswinkel betragen 45°.
Im rechtwinkligen Dreieck AOH misst also ein Winkel 45° => Das Dreieck AOH ist auch gleichschenklig.

Pythagoras im Dreieck AOH: $\overline{HA}^2 + \overline{HO}^2 = \overline{AO}^2$ oder, mit $\overline{HA} = \overline{HO}$, $2\,\overline{HO}^2 = \overline{AO}^2$

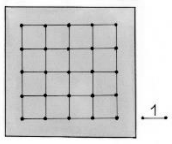
Der Kreis C_2 hat den Flächeninhalt $\pi \cdot \overline{HO}^2$.
Der Kreis C_1 hat den Flächeninhalt $\pi \cdot \overline{AO}^2 = \pi \cdot 2\,\overline{HO}^2$

Der Flächeninhalt von Kreis C_2 ist halb so groß wie der Flächeninhalt von Kreis C_1.

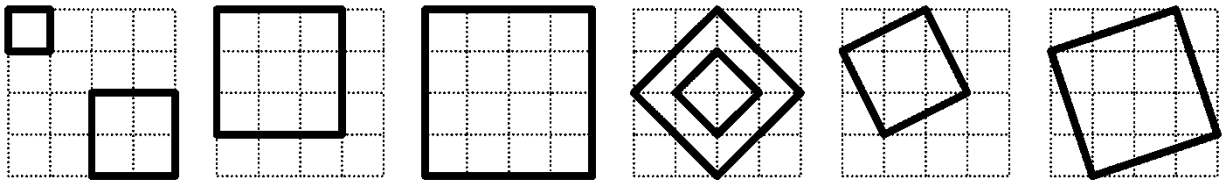
-> Die graue und die weiße Zone haben wirklich denselben Flächeninhalt.

Bewertungsvorschlag
2 Punkte für die Zeichnung
2 Punkte für die Konstruktionsbeschreibung
3 Punkte für die mathematische Begründung, dass beide Zonen denselben Flächeninhalt haben

Aufgabe 8 – *Punkte zum Quadrat* – 5 Punkte –



Im Folgenden die möglichen Quadrate und ihre Seitenlängen:



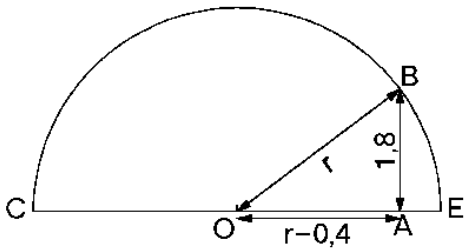
c = 1 $c = 2$ $c = 3$ $c = 4$ $c = \sqrt{2}$ $c = \sqrt{5}$ $c = \sqrt{10}$
$c = 2\sqrt{2}$

Man kann acht verschiedene Quadrate mit den Seitenlängen 1, 2, 3, 4, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ einzeichnen.

Bewertungsvorschlag
1 Punkt für die Seitenlängen 1, 2, 3 und 4.
je 1 Punkt für jede weitere der vier restlichen Seitenlängen

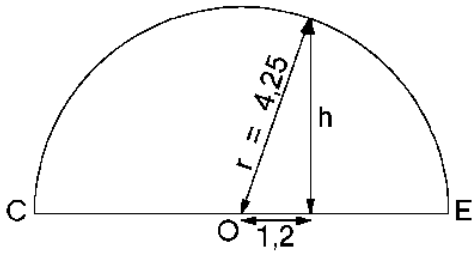
Aufgabe 9 – *Passt das?* – 7 Punkte

Zunächst wird der Radius des Tunnels berechnet. Pythagoras liefert



$$(r - 0{,}4)^2 + 1{,}8^2 = r^2$$
$$r^2 - 0{,}8\,r + 0{,}16 + 3{,}24 = r^2 \qquad | - r^2\ ;\ + 0{,}8\,r$$
$$3{,}4 = 0{,}8\,r \qquad | : 0{,}8$$
$$\mathbf{r = 4{,}25\ [m]}$$

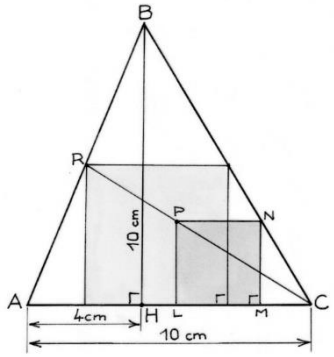
Im besten Fall fährt der Lastwagen genau mittig durch den Tunnel. Es ist also zu prüfen, ob der Tunnel in einer Entfernung von 1,20 m rechts und links vom Punkt O hoch genug ist. Mit Pythagoras erhält man



$$h^2 + 1{,}2^2 = 4{,}25^2 \qquad | - 1{,}2^2$$
$$h^2 = 16{,}6225$$
$$\mathbf{h \approx 4{,}08\ [m]}$$

Der Lastwagen ist aber 4,10 m hoch.
Der Lastwagen passt nicht durch den Tunnel.

Bewertungsvorschlag
3 Punkte für den Radius des Tunnels
3 Punkte für die Höhe h des Tunnels in 1,20 m Entfernung von O
1 Punkt für die Folgerung, dass der Lastwagen nicht durch den Tunnel passt
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze

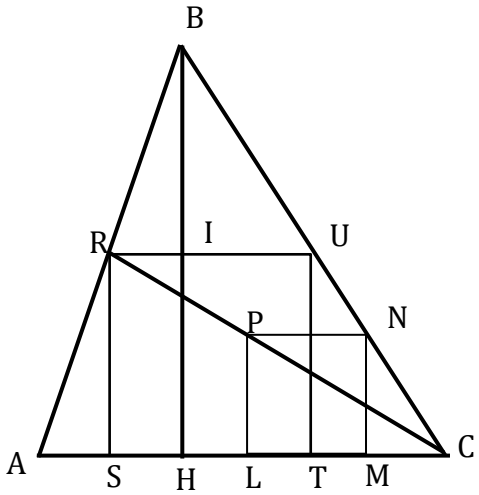


Aufgabe 10 – *So groß wie möglich* – 10 Punkte -

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Aufgabe zu lösen. Hier eine davon:

Sei STUR das gesuchte größtmögliche Quadrat und I der Schnittpunkt der Strecken HB und RU.
Sei x die gesuchte Seitenlänge größtmöglichen Quadrats.
Dann gilt $\overline{BI} = 10 - x$.

Mit den Strahlensätzen gilt



$$\frac{\overline{RU}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BH}}$$
$$\frac{x}{10} = \frac{10-x}{10}$$
$$x = 10 - x$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Die Seitenlänge des größtmöglichen Quadrats beträgt 5 cm.

Bewertungsvorschlag
3 Punkte für die Zeichnung
7 Punkte für die Lösung mit Erklärung
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 11 – *Murmelspiel* – 5 Punkte -

Die Gewinnchance ist am größten, wenn Frieda in einen Beutel nur eine rote Murmel legt und in den anderen Beutel die neun anderen Murmeln. Die Gewinnchance beträgt dann $1 \cdot \frac{4}{9}$.
Es genügt, wenn die SchülerInnen an weiteren Beispielen zeigen, dass andere Aufteilungen der Murmeln zu kleineren Gewinnwahrscheinlichkeiten führen.

Für die größtmögliche Gewinnchance muss Frieda in einen Beutel eine rote Murmel legen und in den anderen Beutel alle anderen Murmeln.

Bewertungsvorschlag

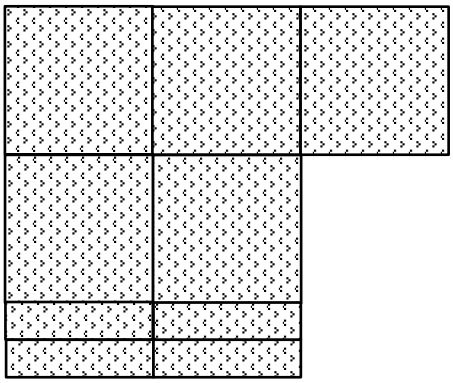
5 Punkte für die Lösung mit Erklärung

2,5 Punkte, wenn nicht die optimale Aufteilung gefunden, aber die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wurde und andere Aufteilungen mit geringerer Gewinnwahrscheinlichkeit angegeben wurden

Aufgabe 12 – *Abgerissen* – 7 Punkte –

Hier eine mögliche Lösung.
Die Seitenlänge der Quadrate ist x.
Die Rechtecke haben die Seitenlängen x und 1.

Bemerkung: Es gibt mehrere Lösungen.



Bewertungsvorschlag

7 Punkte für eine Lösung mit Seitenlängen und Erklärung

3 Punkte, wenn nur der Umfang oder nur der Flächeninhalt den Anforderungen entspricht

Aufgabe 13 – *Pythagoreische Zahlentripel* – 10 Punkte –

$m = 5$ und $n = 4$ => $a = 5^2 - 4^2 = 9$ $b = 2mn = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ $c = m^2 + n^2 = 5^2 + 4^2 = 41$

Für $m = 5$ und $n = 4$ erhält man das primitive pythagoreische Zahlentripel (9, 40, 41).

$b = 2mn = 2024$ => $mn = 1012$ Primfaktorzerlegung: $1012 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$

Wenn m und n gerade sind, sind auch a, b und c gerade und bilden somit kein primitives pythagoreisches Zahlentripel. Daher kann man die Fälle ausschließen, in denen m und n gerade sind.
Wir schreiben 1012 als Produkt von zwei Faktoren, von denen einer ungerade ist:

$1012 = 1 \cdot 1012 = 4 \cdot 253 = 11 \cdot 92 = 23 \cdot 44.$

Die Tabelle führt die vier primitiven pythagoreischen Zahlentripel für $b = 2024$ auf.

m	*n*	*a*	*b*	*c*
1012	1	**1 024 143**	**2024**	**1 024 145**
253	4	**63 993**	**2024**	**64 025**
92	11	**8 343**	**2024**	**8 585**
44	23	**1 407**	**2024**	**2 465**

Bewertungsvorschlag

2 Punkte für jedes richtige Zahlentripel