Mathematik ohne Grenzen – Probewettbewerb 2021
Lösungshinweise

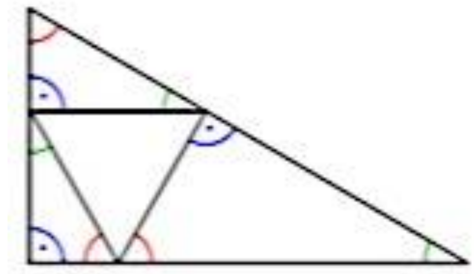
Aufgabe 1 – *Auf einer Linie* – 7 Punkte -

Für diese Aufgabe gibt es verschiedene Lösungswege. Hier eine mögliche Lösung:

Das erste Kind läuft in einer Stunde 5 km, also 20 Runden. Das zweite Kind läuft 4 km, also 16 Runden pro Stunde und das dritte Kind läuft 3 km, also 12 Runden pro Stunde. In einer Viertelstunde legt das erste Kind genau 5 Runden zurück, das zweite genau 4 Runden und das dritte genau 3 Runden.

15 Minuten nach dem Start befinden sich die drei Kinder wieder auf der Startlinie.

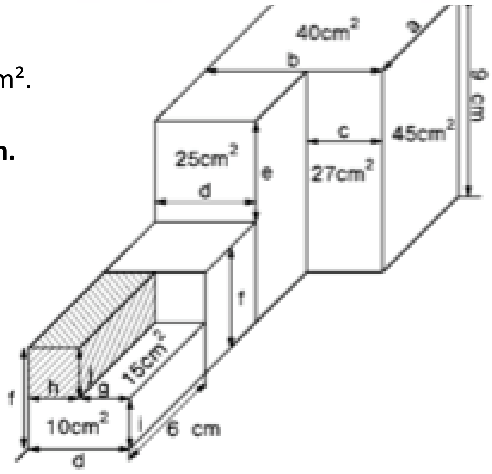
Aufgabe 2 – *Vier für eins* – 5 Punkte



Diese Lösung ist die einzig mögliche.

Die blau markierten Winkel sind rechte Winkel, die rot markierten Winkel messen 60° und die grün markierten 30°.

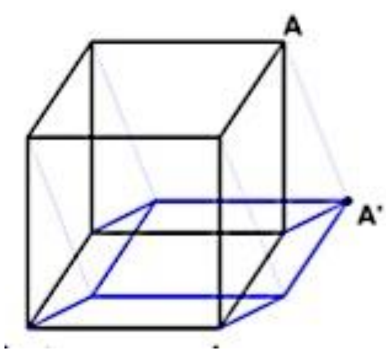
Aufgabe 3 – *Von Quader zu Quader* – 7 Punkte



- Die rechte Seitenfläche des hinteren Quaders misst 45 cm². Mit der Kantenlänge 9 cm erhält man **a = 5 cm.**
- Mit dem Flächeninhalt 40 cm² ergibt sich daraus **b = 8 cm.**
- Mit dem Flächeninhalt 27 cm² und der Kantenlänge 9 cm erhält man **c = 3 cm.**
- Die Kantenlänge d ergibt sich aus **d = b – c = 5 cm.**
- Mit dem Flächeninhalt 25 cm² erhält man **e = 5 cm.**
- **f = 9 cm – e = 4 cm**
- **g · 6 cm = 15 cm² => g = 2,5 cm**
- **h = d – g = 2,5 cm**
- **d · i = 10 cm² => i = 2 cm**
- **j = 4 cm – i = 2 cm.**
- Volumen V des schraffierten Quaders:
  V = h · j · 6 cm = 2,5 cm · 2 cm · 6 cm = 30 cm².

Das Volumen des schraffierten Quaders beträgt 30 cm³.

Aufgabe 4 – *Der Schatten des Würfels* – 5 Punkte -



Bemerkungen:

- Die Schattenlinien zweier paralleler Kanten sind parallel und gleich lang.
- Würfelpunkte, die auf der Tischplatte liegen, werfen keinen Schatten. Sie sind Fixpunkte.

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 5 – *Längs oder quer?* – 7 Punkte -

Oliviers zylinderförmiger Behälter hat die Höhe 1,80 m und den Umfang 1,50 m.

Der Radius r_1 des Behälters beträgt also $\mathrm{r}_1 = \frac{1,5}{2\pi}$ m.

Somit hat der Behälter das Volumen $\mathbf{V_1} = \boldsymbol{\pi} \cdot (\frac{\mathbf{1,5}}{\mathbf{2\pi}})^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{1,80} = \frac{\mathbf{2,025}}{\mathbf{2\pi}}$ [m³]

Der zylinderförmiger Behälter nach Roses Vorschlag hat die Höhe 1,50 m und den Umfang 1,80 m.

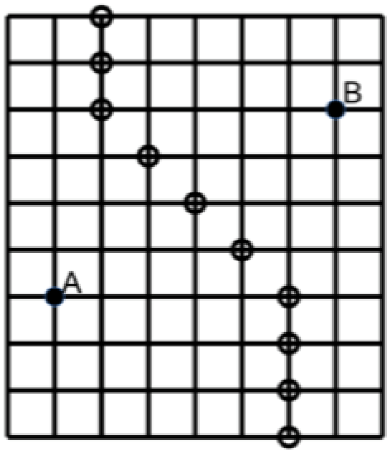
Der Radius r_2 des Behälters beträgt also $r_2 = \frac{1,8}{2\pi}$ cm.

Somit hat der Behälter das Volumen $\mathbf{V_2} = \boldsymbol{\pi} \cdot (\frac{\mathbf{1,8}}{\mathbf{2\pi}})^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{1,80} = \frac{\mathbf{2,430}}{\mathbf{2\pi}}$ [m³]

Volumenverhältnis: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2,430}{2,025} = 1,2$ => $\mathbf{V_2 = 1,2 \cdot V_1}$

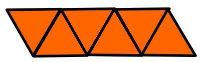
Rose hat Recht. Der andere Behälter hat 20% mehr Volumen.

Aufgabe 6 – *Mediapolis* – 5 Punkte -

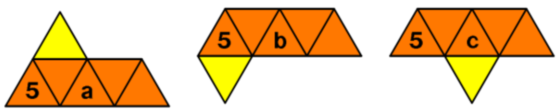


Aufgabe 7 – *Hexamanten* – 7 Punkte -

Es gibt nur einen Hexamanten, bei dem die sechs Dreiecke ein Viereck bilden.

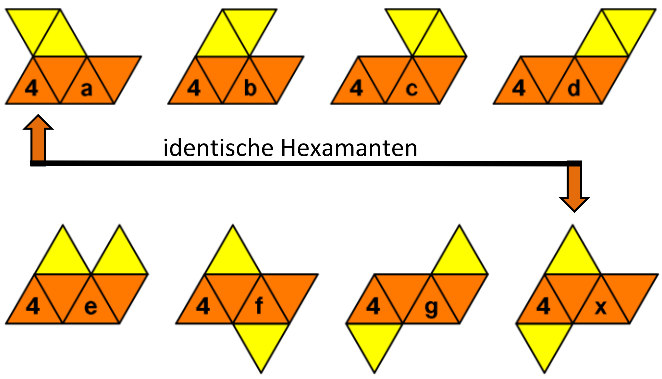


Es gibt drei Hexamanten, bei denen fünf Dreiecke ein Viereck bilden.

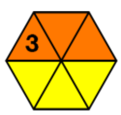


Es gibt sieben Hexamanten, bei denen vier Dreiecke ein Viereck bilden.

Bemerkung: Die Hexamanten 4a und 4x sind kongruent.



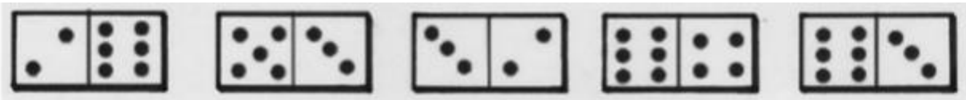
Es gibt nur einen Hexamanten, bei dem drei Dreiecke ein Viereck bilden.



Insgesamt gibt es zwölf verschiedene Hexamanten.

Aufgabe 8 – *Bruchdomino* – 5 Punkte -

Zunächst bestimmt man für jeden Dominostein die beiden möglichen Brüche.



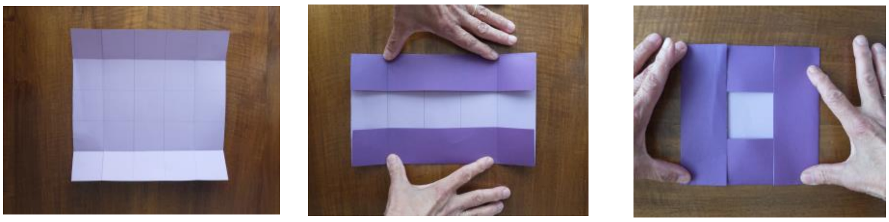
$\frac{1}{3}$ oder 3 $\quad$ $\frac{5}{3}$ oder $\frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ $\quad$ 2 oder $\frac{1}{2}$

Es ergeben sich die beiden Lösungen

$$\frac{6}{2}+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{6}{3}=8 \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{6}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{6}{3}=7$$

Aufgabe 9 – *Motive falten* – 7 Punkte -

Für Motiv A wird an jeder Seite ein Streifen der Breite 3 cm (ein Fünftel der Seitenlänge) eingefaltet,



Hier die drei Faltungen für Motiv B:

Das Motiv wird sichtbar, wenn das Blatt gewendet wird.

Aufgabe 10 – *Einmal Algorithmus und zurück* – 10 Punkte -

Sei N die Ausgangszahl mit N = a · 1000 + b · 100 + c · 10 + d.

Im ersten Schritt des Algorithmus ergibt sich die Summe a + (10a + b) + (100a + 10b + c) = 111a + 11b + c

Im zweiten Schritt wird diese Summe mit 9 multipliziert. Man erhält 999a + 99b + 9c

Im dritten Schritt wird die Quersumme von N addiert:
999a + 99b + 9c + a + b + c + d = 1000a + 100b + 10a + d = N.

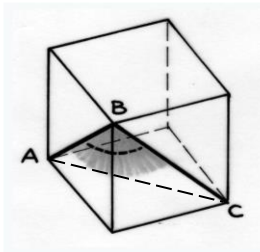
Klasse 10

Aufgabe 11 – *2021 Prima neues Jahr!* – 5 Punkte -

Die Gleichung lässt sich vereinfachen zu $2021 = a \cdot b$.
Die einzige Möglichkeit, 2021 als Produkt von zwei Primzahlen zu schreiben, ist $2021 = 43 \cdot 47$

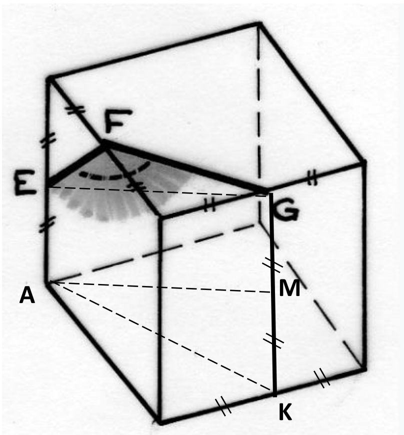
Lösungen: a = 43 und b = 47 oder a = 47 und b = 43.

Aufgabe 12 – *Winkel im Würfel* – 7 Punkte -



Das Dreieck ABC ist gleichseitig, denn jede Dreiecksseite ist eine Diagonale einer Seitenfläche des Würfels.

Der Winkel ABC misst also 60°.



Das Dreieck EGF ist gleichschenklig.

Sei a die Kantenlänge des Würfels. Dann liefert Pythagoras EF = FG = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

In der Zeichnung ist M der Mittelpunkt der Strecke KG. Das Viereck AMGE ist ein Parallelogramm. Daher sind die Strecken EG und AM gleich lang.

Mit Pythagoras gilt $AM^2 = AK^2 + KM^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2}{4}$ => $AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

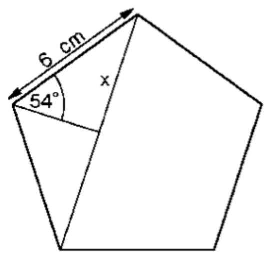
=> $EG = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Sei J der Mittelpunkt der Strecke EG. Das Dreieck EJF ist rechtwinklig in J mit $EJ = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

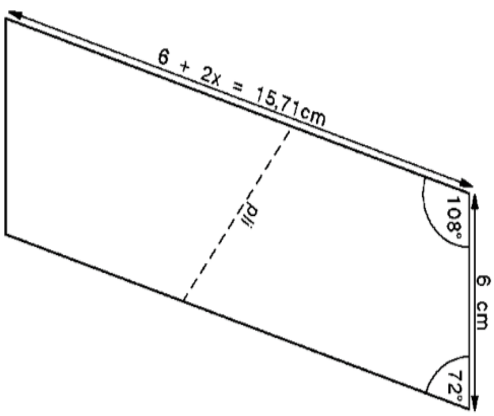
Der Winkel $\propto$ = EFJ lässt sich berechnen durch $\sin(\propto) = \frac{EJ}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ => $\propto = 60°$

Der Winkel EFH misst also 120°.

Aufgabe 13 – *Eine Ecke mehr* – 10 Punkte



In einem regelmäßigen Fünfeck betragen die Innenwinkel 108°.
Die Länge der Strecke x (siehe Zeichnung) lässt sich berechnen durch
$\sin(54°) = \frac{x}{6}$ => $2x \approx 9{,}71$ cm
Eine Seitenlänge des viereckigen Blatts beträgt 6 cm + 2x ≈ 15,71 cm, die andere 6 cm.



Da jeweils gegenüberliegende Seiten des Vierecks gleich lang sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.
Zwei Innenwinkel in diesem Parallelogramm sind gleichzeitig auch Innenwinkel des Fünfecks und betragen 108°. Wegen der Winkelsumme im Viereck betragen die anderen beiden 72°.
Die gestrichelte Linie in der Skizze links zeigt die Faltung.

Mathématiques Sans Frontières