In Zusammenarbeit mit der Inspection Pédagogique Régionale und der IREM de Strasbourg

# Mathematik Ohne Grenzen

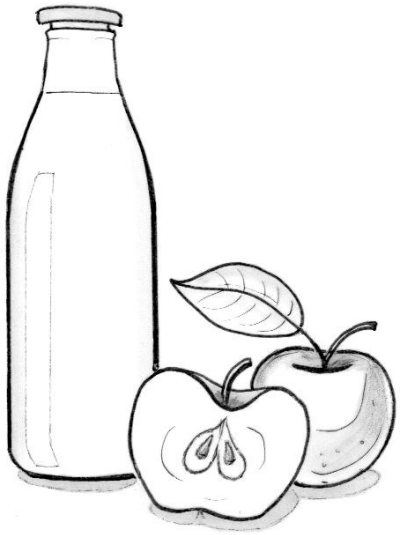
## Hauptwettbewerb 2025

- ✓ **Für jede Aufgabe, auch für eine nicht bearbeitete, ist ein Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.**
- ✓ **Auch fehlerhafte oder unvollständige Lösungen werden berücksichtigt.**
- ✓ **Die Sorgfalt der Darstellung sowie Qualität und Präzision der Begründungen werden mit bewertet.**

---

### Aufgabe 1
### 7 Punkte
### Apfelschorle

**Verfasst in einer der vier Fremdsprachen einen Lösungstext mit mindestens 30 Wörtern.**



Richard vient de faire du jus de pommes. Les enfants préfèrent le boire dilué avec de l'eau. Richard prélève 25 cL de jus de pommes d'une bouteille de 100 cL, puis il complète avec de l'eau. Il prélève ensuite 1/5 de ce mélange et le remplace par de l'eau.

***Quel est le pourcentage de jus de pommes dans le mélange ainsi obtenu ? Expliquer votre raisonnement.***

Richard has just made apple juice. Children prefer to drink it diluted with water. Richard takes 25cl of apple juice from a 100cl bottle, then he tops up the bottle with water. He then takes 1/5 of this mixture and replaces it with water.

***What is the percentage of apple juice in the resulting mixture? Explain your reasoning.***

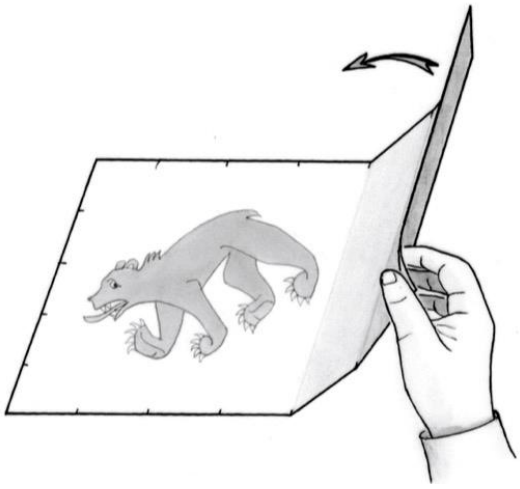
Richard ha preparato del succo di mele. I bambini preferiscono berlo diluito in acqua. Richard, perciò, preleva 25 cl di succo di mela da una bottiglia da 100 cl e, quindi, la riempie aggiungendo dell'acqua. In seguito, preleva 1/5 di questa miscela e la sostituisce nella bottiglia con dell'acqua.

***Qual è la percentuale di succo di mela nella miscela così ottenuta? Illustrate il vostro ragionamento.***

Richard acaba de hacer zumo de manzana. Los niños prefieren beberlo diluido con agua. Richard extrae 25 cl de zumo de manzana de una botella de 100 cl, luego la completa con agua. Después extrae 1/5 de esta mezcla y la sustituye por agua.

***¿Cuál es el porcentaje de zumo de manzana de la mezcla así obtenida? Justifica tu respuesta.***

### Aufgabe 2 5 Punkte
### Vielfältig



Ein rechteckiges Blatt Papier hat den Umfang 69,6 cm.
Maxime unterteilt das Blatt durch Längs- und Querfaltungen.
Die Längsfaltungen (parallel zu den kürzeren Rechteckseiten) unterteilen das Blatt in sieben gleich große Rechtecke.
Die Querfaltungen (parallel zu den längeren Rechteckseiten) unterteilen das Blatt in fünf gleich große Rechtecke.
Durch die Längs- und Querfaltungen hat Maxime das Blatt in lauter kleine Quadrate unterteilt.

***Berechnet die Seitenlängen des rechteckigen Blattes, das Maxime verwendet hat. Erklärt euer Vorgehen.***

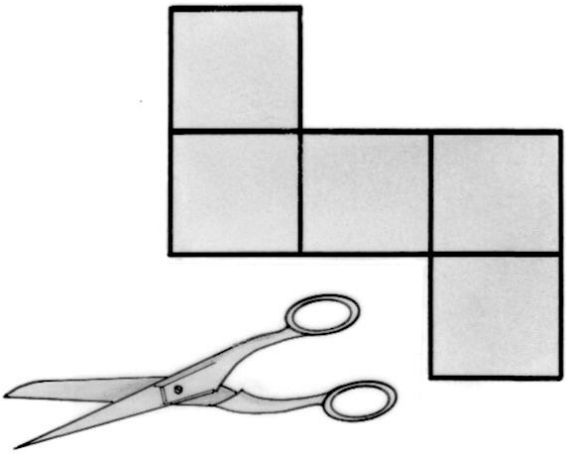
## Aufgabe 3 7 Punkte
## Drei zum Quadrat

***Die unten abgebildete Figur soll durch zwei geradlinige Schnitte so in drei Teile zerlegt werden, dass man die Teile zu einem Quadrat zusammensetzen kann.***

***Findet zwei verschiedene Zerlegungen:***

- ***eine durch zwei zueinander senkrechte Schnitte***
- ***eine durch zwei zueinander parallele Schnitte.***

***Führt beide Zerlegungen durch und klebt die dabei entstandenen Teile auf das Antwortblatt.***



## Aufgabe 4 5 pts
## Auf der Burg Termes

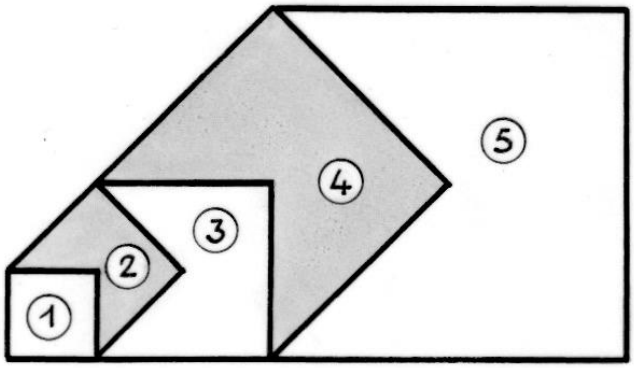
Die Burg Termes wird von feindlichen Soldaten belagert. Die Essensvorräte auf der Burg reichen nur noch 60 Tage lang für die Burgbewohner, und die Soldaten verhindern, dass Nachschub angeliefert wird.
Durch einen schmalen unterirdischen Gang suchen 30 Dorfbewohner Zuflucht auf der Burg. Jetzt reichen die Vorräte für alle nur noch 50 Tage lang.

***Wie viele Burgbewohner waren vor der Ankunft der Dorfbewohner auf der Burg? Erklärt euer Vorgehen.***

## Aufgabe 5 7 Punkte
## Wiederholt

Die rechts abgebildete Figur entsteht, wenn man nacheinander die Quadrate wie folgt zeichnet:
Quadrat ① hat die Seitenlänge 1.
Eine Seite von Quadrat ② ist eine Diagonale von Quadrat ①.
Eine Seite von Quadrat ③ ist eine Diagonale von Quadrat ②.
Und so weiter.

***Bestimmt die Seitenlänge von Quadrat ⑨ und den Flächeninhalt der ganzen Figur, die entstanden ist, nachdem Quadrat ⑨ gezeichnet wurde***.



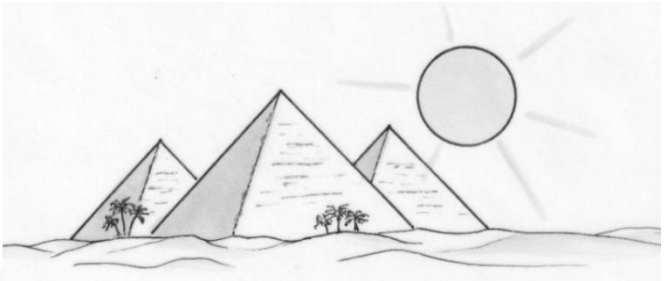

## Aufgabe 6 5 Punkte
## πramiden

Um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, verwenden wir heute die Zahl $\pi$. Ein Näherungswert für $\pi$ *ist* 3,1415926.
Im Zeitalter der Pyramiden verwendeten die Ägypter eine andere Methode, um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen:

- Sie zogen vom Durchmesser des Kreises 1/9 ab.
- Sie quadrierten das so erhaltene Ergebnis.

Diese Berechnung lieferte einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Kreises.

***Bei dieser Rechnung taucht die Zahl $\pi$ nicht auf. Welchen Näherungswert für $\pi$ verwendeten die Ägypter? Erklärt eure Antwort.***



## Aufgabe 7 7 Punkte
## 1 nach vorne 1 nach hinten

Monsieur Riche möchte eine Wohnung kaufen. Der Preis der Wohnung ist sechsstellig. Die erste Ziffer ist eine 1.
Bei der Vertragsunterzeichnung macht der Makler einen Fehler. Er schreibt die 1 nicht als erste, sondern als letzte Ziffer. Der aufgeführte Kaufpreis der Wohnung ist jetzt dreimal so hoch wie der ursprüngliche Preis. Monsieur Riche unterschreibt natürlich nicht.

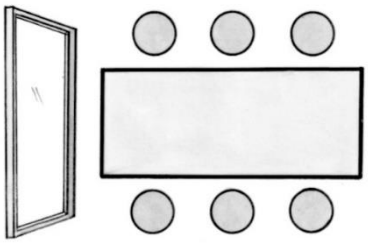
***Bestimmt den ursprünglichen Kaufpreis der Wohnung. Erklärt, wie ihr vorgegangen seid.***

## Aufgabe 8 5 Punkte
## Sitzordnung

Drei Ehepaare dinieren an einem Tisch:
Herr und Frau Hans,
Herr und Frau Klein sowie
Herr und Frau Müller.

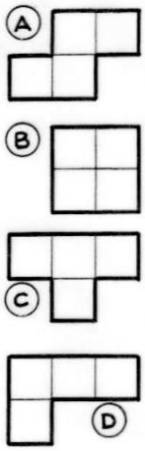
Kein Herr sitzt neben einem anderen Herrn.
Kein Herr sitzt neben seiner Ehefrau oder ihr gegenüber.
Herr Hans sitzt weder neben Frau Klein, noch ihr gegenüber.
Frau Klein sitzt neben Frau Müller und plaudert mit ihr.
Herr Müller mag keinen Luftzug und sitzt daher nicht am Fenster.

***Setzt die Damen und Herren den Vorgaben entsprechend an den Tisch.***



## Aufgabe 9 7 Punkte
## Tetromino

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |




Von den vier abgebildeten Spielsteinen A, B, C und D wählt man einen aus und legt ihn so auf das Spielfeld, dass er genau vier Zahlen bedeckt. Dabei bewahrt man die ursprüngliche Orientierung des Spielsteins, das heißt, man dreht ihn nicht. Dann berechnet man die Summe der Zahlen, die der Spielstein bedeckt.

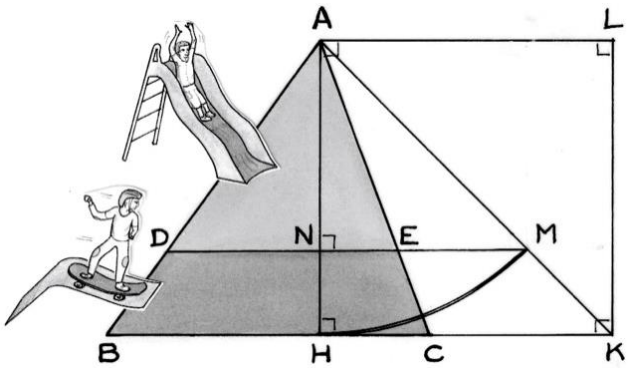
<u>Beispiel</u>: In der Abbildung wurde Spielstein A auf das Spielfeld gelegt. Er bedeckt die Zahlen 13, 14, 22 und 23.
13 + 14 + 22 + 23 = 72.
Die Summe der vier Zahlen ist 72.

***Welche vier Zahlen bedeckt der Spielstein C, wenn die Summe 318 ist?***
***Welchen der vier Spielsteine muss man auf das Spielfeld legen, um die Summe 121 zu erhalten? Und welche vier Zahlen werden dann bedeckt?***
***Bei einem Spielstein ist die Summe immer eine ungerade Zahl. Bei welchem? Zeigt, warum das so ist.***

## Aufgabe 10 10 Punkte
## Flächengleich

Die Gemeinde Thalesheim besitzt ein dreieckiges Grundstück. In der Abbildung ist es durch das Dreieck ABC dargestellt. Es soll in zwei Bereiche aufgeteilt werden, die genau denselben Flächeninhalt haben. Auf dem einen Bereich soll ein Spielplatz und auf dem anderen ein Skatepark gebaut werden.

Der Stadtplaner hat diese Teilung im Bauplan wie folgt konstruiert:
- Zeichne im Dreieck ABC die Höhe HA.
- Konstruiere das Quadrat AHKL und die Diagonale AK.
- Zeichne auf der Strecke AK den Punkt M ein, der von A denselben Abstand hat wie der Punkt H.
- Zeichne die Orthogonale zur Strecke HA durch M.
  Sie schneidet die Strecke AB im Punkt D, die Strecke AH im Punkt N und die Strecke AC im Punkt E.




Im Plan ist die Strecke HA 12 cm lang, die Strecke BH ist 9 cm lang und die Strecke HC ist 5 cm lang.
Die beiden flächengleichen Bereiche werden durch das Dreieck DEA und das Trapez BCED dargestellt.
(*Die Eckchen im Plan bei den Punkten A, N, H, K und L symbolisieren rechte Winkel.)*

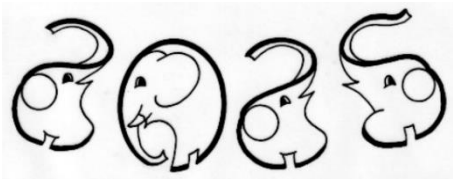
***Zeichnet den abgebildeten Bauplan mit den angegebenen Maßen.***
***Beweist, dass das Grundstück der Gemeinde auf diese Art tatsächlich in zwei flächengleiche Bereiche zerlegt wird.***

# Klasse 10

## Aufgabe 11 5 Punkte
2025

***Findet alle positiven ganzen Zahlen a und b, so dass***

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 2025 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$ ***gilt.***



## Aufgabe 12 7 Punkte
1, 2 oder 3

Zwei identische sechsseitige Spielwürfel sind nur mit den Augenzahlen 1, 2 und 3 beschriftet. Sie werden gleichzeitig geworfen.

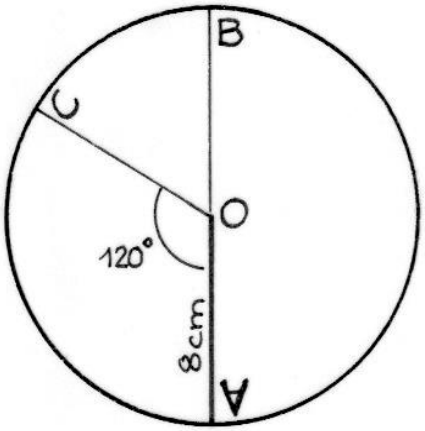
Die Wahrscheinlichkeit, zwei Zweien zu würfeln, beträgt $\frac{1}{9}$.

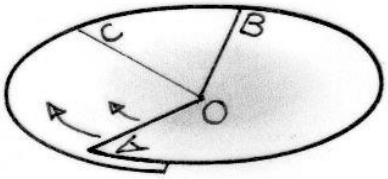
Die Wahrscheinlichkeit, eine Eins und eine Zwei zu würfeln, beträgt $\frac{1}{3}$.

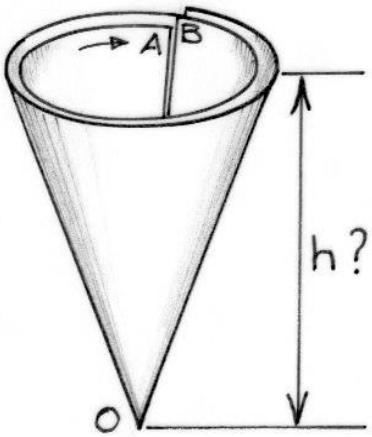
***Wie viele Einsen, Zweien und Dreien befinden sich auf jedem Würfel? Erklärt eure Antwort.***

## Aufgabe 13 10 Punkte Hütchen

Mathématiques SANS Frontières




Rémi will aus Papier einen Kegel ohne Grundseite herstellen. Dazu schneidet er eine Kreisscheibe vom Radius 8 cm aus und zeichnet den Kreismittelpunkt O sowie einen Punkt A auf dem Kreis ein.
Rémi zeichnet den Durchmesser durch A und O. Er schneidet den Kreis im Punkt B.
Schließlich zeichnet Rémi den Punkt C so ein, dass der Winkel COA 120° beträgt.

Stellt diese Kreisscheibe her und schneidet sie entlang dem Radius OA bis zum Mittelpunkt O ein.
Wenn ihr jetzt den Punkt A wie in der Abbildung auf dem Kreis entlangschiebt, erhaltet ihr einen Kegel.

***Berechnet die Höhe des Kegels exakt, wenn***

- ***die Punkte A und B übereinander liegen.***
- ***die Punkte A und C übereinander liegen.***

# Mathematik ohne Grenzen - Hauptwettbewerb 2025
# Lösungshinweise
# Bewertungsvorschläge

*Die hier vorgestellten Lösungen sind oft nicht die einzig möglichen. Andere Lösungswege werden natürlich auch akzeptiert.*

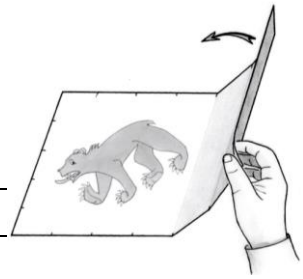
*Die Bewertungsvorschläge geben einen Rahmen vor, von dem in begründeten Fällen auch abgewichen werden kann.*

## Aufgabe1 – *Apfelschorle* – 7 Punkte

Richard gießt 25 cl Apfelsaft aus und füllt die Flasche mit Wasser auf.
In der Flasche sind jetzt 75 cl Apfelsaft und 25 cl Wasser.
Er gießt 1/5 dieses Gemischs aus, also 15 cl Apfelsaft und 5 cl Wasser.
Es bleiben in der Flasche 60 cl Apfelsaft und 20 cl Wasser. Richard füllt noch 20 cl Wasser nach.
Die Schorle besteht also aus 60 cl Apfelsaft und 40 cl Wasser.

**Die Apfelschorle enthält 60 % Apfelsaft.**

| **Bewertungsvorschlag** |
|---|
| 1 Punkte für die richtige Lösung |
| 3 Punkte für die Erklärung |
| 3 Punkte für die sprachliche Qualität |



## Aufgabe 2 – *Vielfältig* – 5 Punkte

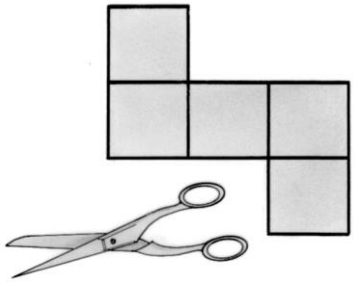
Sei *c* die Seitenlänge der kleinen Quadrate.
Das von Maxime verwendete rechteckige Blatt hat dann die Seitenlängen 7*c* und 5*c*.
Für den Umfang des Rechtecks gilt $2 \cdot (7c + 5c) = 24c = 69{,}6$ cm.
Man erhält $c = 69{,}6 \text{ cm} : 24 = 2{,}9$ cm.
Länge des Rechtecks: $2{,}9 \text{ cm} \cdot 7 = 20{,}3$ cm
Breite des Rechtecks: $2{,}9 \text{ cm} \cdot 5 = 14{,}5$ cm

**Die Seitenlängen des rechteckigen Blattes betragen 20,3 cm und 14,5 cm.**

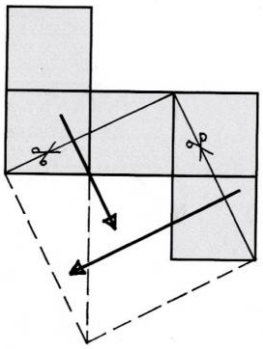
| **Bewertungsvorschlag** |
|---|
| 2 Punkte für die richtige Lösung |
| 3 Punkte für die Erklärung |

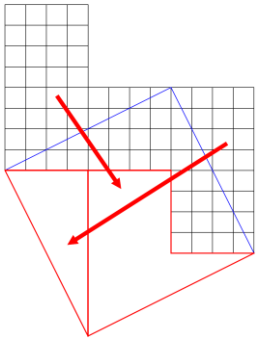
## Aufgabe 3 – *Drei zum Quadrat* – 7 Punkte

Sei $x$ die Seitenlänge der kleinen Quadrate. Der Flächeninhalt der Figur beträgt $5\,x^2$.
Das gesuchte Quadrat hat also die Seitenlänge $x\sqrt{5}$. Das ist die Länge der Diagonalen eines Rechtecks, das aus zwei Quadraten besteht.
Diese Überlegungen führen zu den folgenden beiden Lösugen – es sind nicht die einzigen:

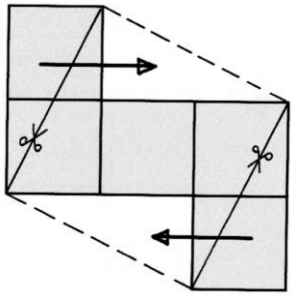


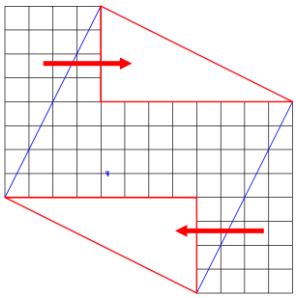
Zwei zueinander orthogonale Schnitte





Zwei zueinander parallele Schnitte





**Bewertungsvorschlag**
4 Punkte für eine richtige Zerlegung
3 Punkte für eine weitere richtige Zerlegung
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze

## <u>Aufgabe</u> 4 – *Auf der Burg Termes* – 5 Punkte

Sei P die Anzahl der Burgbewohner, die vor der Ankunft der Dorfbewohner auf der Burg waren. Für sie reichen die Vorräte 60 Tage lang. Auf der Burg gibt es also 60 P Tagesrationen.

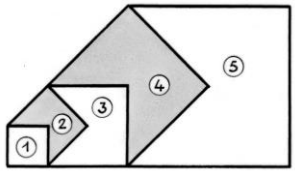
Nach der Ankunft der 30 Dorfbewohner befinden sich P + 30 Personen auf der Burg. Für sie reichen die Vorräte 50 Tage lang. Auf der Burg gibt es also 50 · (P + 30) Tagesrationen.

Es gilt somit 60 P = 50 · (P + 30) und somit P = 150.

**Vor der Ankunft der Dorfbewohner waren 150 Burgbewohner auf der Burg.**

**Bewertungsvorschlag**
2 Punkte für die richtige Lösung
3 Punkte für die Erklärung

## Aufgabe 5 – *Wiederholt* – 7 Punkte




Quadrat ① hat die Seitenlänge 1 und den Flächeninhalt 1.
Eine Seite von Quadrat ② ist eine Diagonale von Quadrat ①.
Quadrat ② hat also die Seitenlänge $\sqrt{2}$ und den Flächeninhalt 2.
Eine Seite von Quadrat ③ ist eine Diagonale von Quadrat ②.
Quadrat ③ hat also die Seitenlänge 2 und den Flächeninhalt 4 usw.

| Quadrat | Seitenlänge | Fläche | Gesamtfläche |
|---|---|---|---|
| ① | 1 | 1 | 1 |
| ② | $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ | 2 | 2,5 |
| ③ | $\sqrt{4} = 2$ | 4 | 5,5 |
| ④ | $\sqrt{8} \approx 2{,}828$ | 8 | 11,5 |
| ⑤ | $\sqrt{16} = 4$ | 16 | 23,5 |
| ⑥ | $\sqrt{32} \approx 5{,}657$ | 32 | 47,5 |
| ⑦ | $\sqrt{64} = 8$ | 64 | 95,5 |
| ⑧ | $\sqrt{128} \approx 11{,}314$ | 128 | 191,5 |
| ⑨ | $\sqrt{256} = 16$ | 256 | 383,5 |

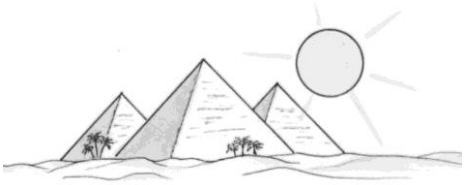
Die Tabelle führt für die Quadrate 1 - 9 die Seitenlänge und den Flächeninhalt auf.
Man stellt fest: Von einem Quadrat zum nächsten verdoppelt sich der Flächeninhalt, und die Seitenlänge wird mit $\sqrt{2}$ multipliziert.

Gesamtflächeninhalt:
Quadrat ① hat den Flächeninhalt 1.
Bei jedem Schritt werden dann vom nächsten Quadrat drei Viertel seines Flächeninhalts zur Gesamtfläche hinzugefügt:
$1 \;;\; 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 \;;\; 2{,}5 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$ und so weiter.
Die Gesamtflächeninhalte der Figuren sind in der Tabelle aufgeführt.

**Quadrat ⑨ hat die Seitenlänge $\sqrt{256}$ = 16. Der Gesamtflächeninhalt der Figur, nachdem Quadrat ⑨ gezeichnet wurde, beträgt 383,5**.

**Bewertungsvorschlag**
3 Punkte für die Seitenlänge von Quadrat ⑨
4 Punkte für den Flächeninhalt der ganzen Figur

## Aufgabe 6 – $\pi ramide$ – 5 Punkte



Sei *d* der Durchmesser des Kreises und *r* sein Radius.
Die Ägypter berechneten den Flächeninhalt des Kreises wie folgt:

$$\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(2\,r)^2 = \frac{256}{81}r^2$$

Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt exakt $\pi \cdot r^2$

**Die Ägypter verwendeten also für $\pi$ den Näherungswert $\frac{256}{81} \approx 3{,}16$.**

**Bewertungsvorschlag**
2 Punkte für die rechnerische Darstellung der Flächenberechnung der Ägypter
3 Punkte für den Näherungswert von $\pi$ mit Erklärung

## Aufgabe 7 – *1 nach vorne 1 nach hinten* – 7 Punkte

Man kann die Ziffern schrittweise von hinten berechnen, wie beim schriftlichen Multiplizieren:
3 · e ist eine Zahl mit der Endziffer 1 (und e ist eine Ziffer zwischen 0 und 9)
=> e = 7, Übertrag 2 (denn 3 · 7 = **2**1)
3d + 2 ist eine Zahl mit der Endziffer e = 7 => d = 5 , Übertrag 1
(denn 3 · 5 + 2 = **1**7).
3c + 1 ist eine Zahl mit der Endziffer d = 5 => c = 8, Übertrag 2 (denn 3 · 8 + 1 = **2**5).

So fährt man fort und erhält 142 857.
Probe: 3 · 142 857 = 428 571.

**Der ursprüngliche Kaufpreis der Wohnung beträgt 142 857 €.**

<u>Andere Methode</u>

Es gilt „ abcde1 = 3 · 1abcde“

100 000a + 10 000b + 1000c + 100d + 10e + 1 = 300 000 + 30 000a + 3000b + 300c + 30d + 3e
70 000a + 7000b + 700c + 70d + 7e = 299 999
7 · (10 000a + 1000b + 100c + 10d + e) = 299 999 I : 7
10 000a + 1000b + 100c + 10d + e = 42857 -> Die gesuchte Zahl 1abcde ist 142 857.

**Bewertungsvorschlag**
1 Punkt für jede korrekte Ziffer
1 Punkt für die Erklärung
1 Punkt für den ursprünglichen Kaufpreis der Wohnung

## Aufgabe 8 – *Sitzordnung* – 5 Punkte

**Es gibt zwei mögliche Lösungen:**

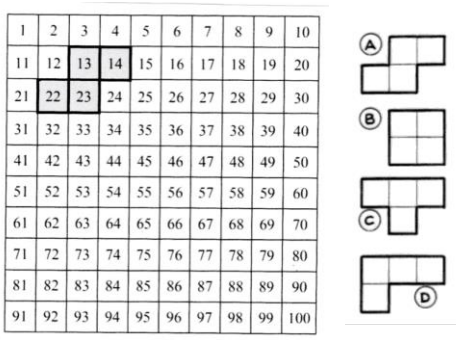
| | | |
|---|---|---|
| Herr Klein | Frau Hans | Herr Müller |
| Herr Hans | Frau Müller | Frau Klein |

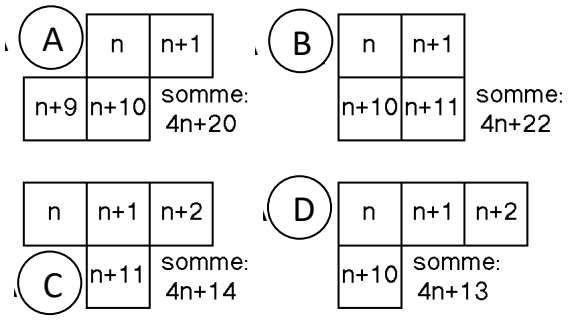
| | | |
|---|---|---|
| Herr Hans | Frau Müller | Frau Klein |
| Herr Klein | Frau Hans | Herr Müller |

**Bewertungsvorschlag**
5 Punkte für eine korrekte Lösung (Eine Begründung ist nicht verlangt.)
Teilpunkte für eine teilweise richtige Sitzordnung

## Aufgabe 9 – *Tetromino* – 7 Punkte

Wir bezeichnen für jeden Spielstein eine der vier Zahlen, die er bedeckt, mit n. In unserem Fall ist n immer die Zahl links oben, also die kleinste der vier Zahlen. Dann berechnen wir für jeden Spielstein die Summe der Zahlen, die er bedeckt, in Abhängigkeit von n.






Wir erhalten für die Spielsteine die folgenden Summen:
A : 4n + 20 B : 4n + 22 C : 4n + 14 D : 4n + 13

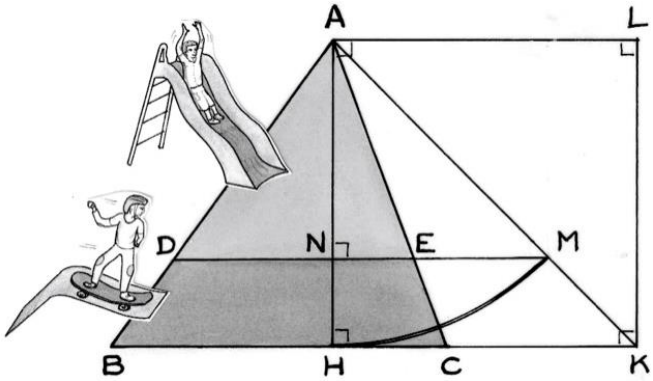
Der Spielstein A überdeckt immer vier Zahlen, deren Summe durch 4 teilbar ist.
Die Spielsteine B und C überdecken immer vier Zahlen, deren Summe gerade ist.
**Spielstein D überdeckt immer vier Zahlen, deren Summe ungerade ist.**

- Spielstein C bedeckt vier Zahlen mit der Summe 318. -> 4n + 14 = 318 -> n = 76
  **Spielstein C bedeckt die Zahlen 76, 77, 78 und 87, wenn die Summe 318 beträgt.**
- Da 121 ungerade ist, werden die vier Zahlen mit dieser Summe von Spielstein D überdeckt.
  4n + 13 = 121 => n = 27
  **Um die Summe 121 zu erhalten, muss man Spielstein D legen.**
  **Er bedeckt dann die Zahlen 27, 28, 29 und 37.**

**Bewertungsvorschlag**
2 Punkte für die Zahlen mit der Summe 318, die von Stein C bedeckt werden
*(Eine Lösung durch Probieren wird akzeptiert.)*
1 Punkt für die Antwort, dass man mit Spielstein D die Summe 121 erhält
2 Punkte für die Zahlen mit der Summe 121, die von Spielstein D bedeckt werden
*(Eine Lösung durch Probieren wird akzeptiert.)*
2 Punkte für die Begründung, dass Spielstein D immer eine ungerade Summe liefert
*(Hier ist eine Begründung gefordert.*
*Ein Auflisten von Beispielen wird nicht mit der vollen Punktzahl bewertet.)*

## Aufgabe 10 – *Flächengleich* – 10 Punkte

Hier eine mögliche Lösung:




Fläche des Dreiecks ABC: $\frac{AH \times BC}{2}$

Fläche des Dreiecks ADE: $\frac{AN \times DE}{2}$

$$\frac{\text{Fläche des Dreiecks ADE}}{\text{Fläche des Dreiecks ABC}} = \frac{AN \times DE}{AH \times BC} = \frac{AN}{AH} \times \frac{DE}{BC}$$

Die Dreiecke ABC und ADE sind ähnlich, da ihre Winkel gleich sind.

Daher gilt $\frac{AN}{AH} = \frac{DE}{BC}$ .

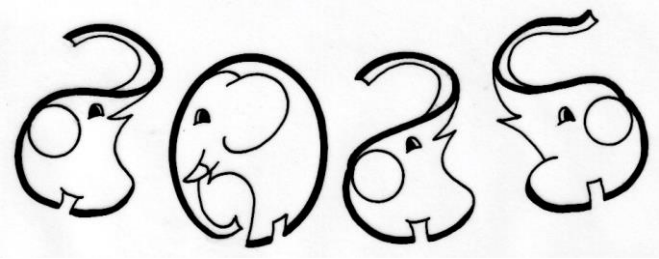
Außerdem gilt $\frac{AN}{AH} = \frac{AN}{AM}$ (denn AH = AM)

Also $\frac{\text{Fläche des Dreiecks ADE}}{\text{Fläche des Dreiecks ABC}} = \left(\frac{AN}{AM}\right)^2 = \frac{1}{2}$ , denn AM = AN $\sqrt{2}$ (Diagonale im Quadrat)

**Das Grundstück der Gemeinde wird tatsächlich in zwei flächengleiche Bereiche zerlegt.**

**Bewertungsvorschlag**
4 Punkte für die Zeichnung
6 Punkte für den Beweis der Flächengleichheit
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze

## .Aufgabe 11 – 2025 – 5 Punkte



Seien *a* und *b* positive ganze Zahlen.

$$a^2 + b^2 = 2025 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$a^2 + b^2 = 2025 \cdot \left(\frac{b^2 + a^2}{a^2 \cdot b^2}\right)$$

$$(a^2 \cdot b^2) \cdot (a^2 + b^2) = 2025 \cdot (b^2 + a^2) \qquad (a\ und\ b\ sind\ positiv)$$

Division durch $(a^2 + b^2)\ ergibt \quad a^2 \cdot b^2 = 2025$

Primfaktorzerlegung von 2025: $2025 = 5^2 \cdot 9^2 = 5^2 \cdot 3^4$

**Man erhält folgende Zahlenpaare (a ; b) als Teiler von 45:**
**(1 ; 45) ; (5 ; 9) ; (15 ; 3) ; (45 ; 1) ; (9 ; 5) ; (3 ; 15)**

**Bewertungsvorschlag**
1 Punkte für die ersten beiden Lösungen und dann ein Punkt für jede weitere Lösung

## Aufgabe 12 – *1, 2 oder 3* – 7 Punkte

Sei a die Anzahl der Einsen und b die Anzahl der Zweien auf dem Würfel.

Wahrscheinlichkeit für zwei Zweien:

$$\frac{b}{6} \cdot \frac{b}{6} = \frac{1}{9}$$

Man erhält b = 2.

Wahrscheinlichkeit für eine Eins und eine Zwei:

$$\frac{ab}{36} + \frac{ab}{36} = \frac{2ab}{36} = \frac{4a}{36} = \frac{a}{9} = \frac{1}{3}$$

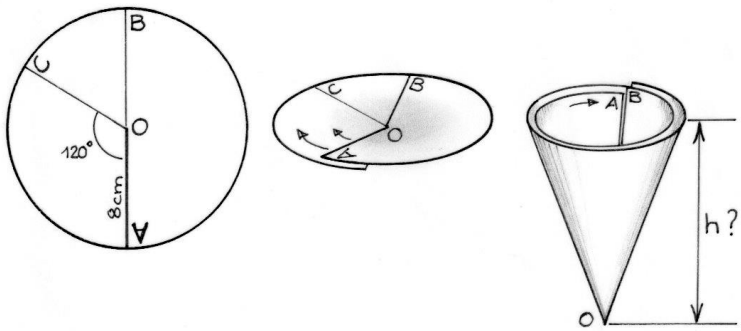
Daher ist a = 3.

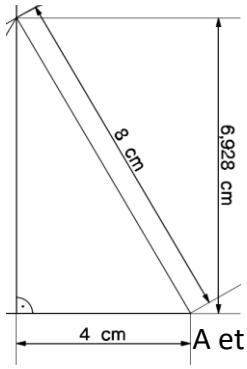
**Auf jedem Würfel befinden sich drei Einsen, zwei Zweien und eine Drei.**

**Bewertungsvorschlag**
3 Punkte für die Anzahl der Zweien mit Erklärung (nur1 Punkt, falls die Erklärung fehlt)
3 Punkte für die Anzahl der Einsen mit Erklärung (nur 1 Punkt, falls die Erklärung fehlt)
1 Punkt für die Anzahl der Dreien

## Aufgabe 13 – *Hütchen* – 10 Punkte

Wenn man den Punkt A auf den Punkt B geschoben hat, liegt das Papier, wie in der Abbildung rechts ersichtlich, an jeder Stelle doppelt. Der Grundkreis-Umfang des so entstandenen Kegels ist also halb so groß wie der Umfang des Ausgangskreises. Damit ist auch des Radius des Kegel-Grundkreises halb so groß wie der ursprüngliche Radius. Er misst daher 4 cm.




Mit Pythagoras kann man die Höhe des Kegels bestimmen:

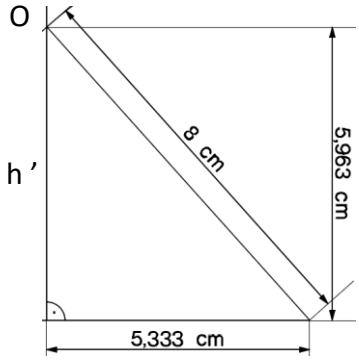
$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$ cm

Wenn man den Punkt A auf den Punk C schiebt, liegt das Papier nur an zwei Dritteln des ursprünglichen Kreisumfangs doppelt. (120° sind ein Drittel von 360°, und da man das Papier ja übereinander schiebt, sind dann zwei Drittel des ursprünglichen Kreisumfangs doppelt belegt.

Der Grundkreis-Umfang des Kegels ist also zwei Drittel so groß wie der Umfang des Ausgangskreises. Damit ist auch des Radius des Kegel-Grundkreises zwei Drittel so groß wie der ursprüngliche Radius. Er misst daher $\frac{16}{3}$ cm.

Mit Pythagoras kann man die Höhe des Kegels bestimmen:

$h' = \sqrt{8^2 - \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{16^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{320}{9}} = \frac{8\sqrt{5}}{3} \approx 5{,}963$ cm




**Wenn die Punkte A und B übereinander liegen, beträgt die Höhe des Kegels exakt** $4\sqrt{3}$ cm.

**Wenn die Punktes A und C übereinander liegen, beträgt die Höhe des Kegels exakt** $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ **cm.**

**Bewertungsvorschlag**
4 Punkte für die Höhe des Kegels, wenn A und B übereinander liegen
6 Punkte für die Höhe des Kegels, wenn A und C übereinander liegen
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze