

# Mathematik Ohne Grenzen



## Probewettbewerb 2022

- ✓ Für jede Aufgabe, auch für eine nicht bearbeitete, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- ✓ Auch fehlerhafte oder unvollständige Lösungen werden berücksichtigt.
- ✓ Die Sorgfalt der Darstellung wird mit bewertet



### Aufgabe 1 7 P In der Küche

Verfasst in einer der vier Fremdsprachen einen Lösungstext mit mindestens 30 Wörtern.

Marie-Christine et Richard reçoivent toute leur famille ce dimanche et doivent s'organiser en cuisine pour préparer le repas en avance.

En effet, Marie-Christine, fine cuisinière, a prévu un poisson en entrée, des blancs de poulet farcis et un kougelhopf en dessert, mais ces trois plats nécessitent tous l'usage du même four à des moments différents, chacun cuit séparément.

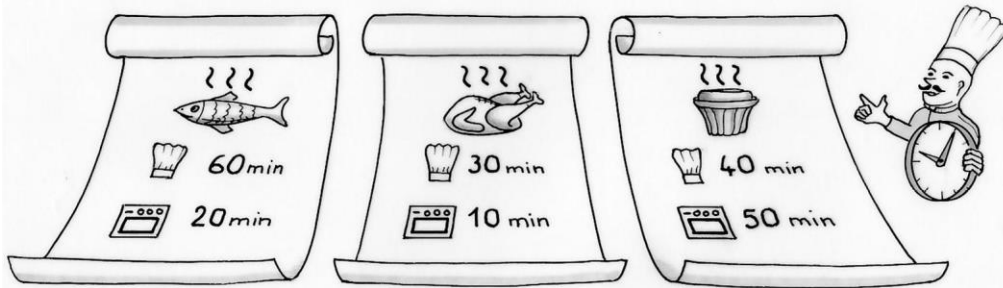
Elle ne peut réaliser qu'une préparation à la fois et chaque plat doit être intégralement préparé avant d'être enfourné. Richard lui dit qu'en 2 h 20 min elle peut tout faire.

**Expliquer comment Marie-Christine s'y prend pour réaliser ces trois plats en 2 h 20 min.**

Marie-Christine y Richard reciben a toda la familia este domingo y tienen que organizarse en la cocina para preparar la comida con antelación.

En efecto, Marie-Christine, una cocinera refinada, tiene previsto pescado como entrante, pechugas de pollos rellenas y un "kougelhupf" como postre, pero estos tres platos necesitan ser horneados en el mismo horno, pero en distintos momentos, cada uno se cocina por separado. Solo puede preparar un plato a la vez y cada plato tiene que estar totalmente preparado antes de hornearlo. Richard le dice que en 2 h 20 min puede hacerlo todo.

**Explica cómo tiene que arreglársela Marie-Christine para preparar estos tres platos en 2 h 20 min.**



Marie-Christine e Richard ricevono questa domenica la loro famiglia e devono, pertanto, organizzarsi in cucina per preparare in anticipo il pranzo.

Marie-Christine, cuoca raffinata, ha previsto d'iniziare con del pesce, a seguire dei petti di pollo farciti, per terminare con la speciale ciambella "kougelhupf" come dolce, ma questi piatti richiedono tutti l'uso dello stesso forno, separatamente, in momenti diversi.

Non può che cucinarli uno alla volta, preparandoli integralmente prima d'infornarli.

Richard l'informa che può realizzare tutto in 2 h e 20 minuti.

**Illustrate come Marie-Christine si organizza per riuscire a realizzare i tre piatti in questo.**

Marie-Christine and Richard are hosting their entire family this Sunday and have to organise themselves in the kitchen to prepare the meal in advance.

Marie-Christine, a fine cook, has planned a fish starter, stuffed chicken breasts and a "gugelhupf" for dessert, but these three dishes all require the use of the same oven at different times, each cooked separately.

She can only prepare one dish at a time and each dish must be fully prepared before being placed in the oven. Richard tells her that in 2 hours and 20 minutes she can do it all.

**Explain how Marie-Christine goes about making these three dishes in 2 hours and 20 minutes.**



- tempo di preparazione prima della cottura
- tiempo de preparación
- preparation time
- temps de préparation

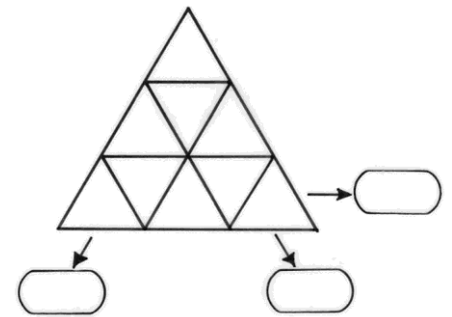


- tempo di cottura
- tiempo de cocción
- cooking time
- temps de cuisson dans la four

Aufgabe 2 5 P

**In der Summe**

Setzt die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so in die neun Felder, dass die fünf Zahlen entlang jeder Dreieckseite dieselbe Summe ergeben.



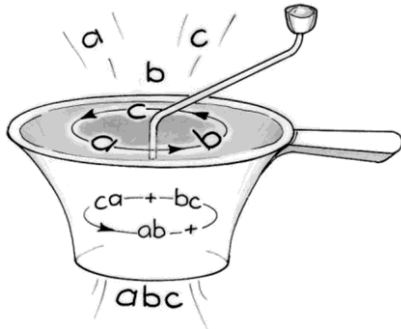
Aufgabe 3 7 P

**In Paaren**

Mit drei Ziffern a, b und c, die nicht 0 sind, bilden wir die natürlichen Zahlen abc, ab, bc und ca. Zum Beispiel bilden wir mit 7, 5 und 8 die Zahlen 758, 75, 58 und 87. Wir stellen fest, dass  $75 + 58 + 87$  nicht 758 ergibt.

**Gibt es eine dreistellige Zahl abc, welche die rechts dargestellte Gleichung erfüllt? Erklärt eure Antwort.**

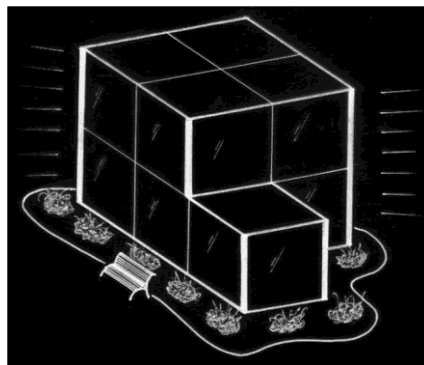
$$\begin{array}{r} ab \\ + bc \\ + ca \\ \hline abc \end{array}$$



Aufgabe 4 5 P

**Im Neonlicht**

Hier seht ihr den Entwurf für ein Museum. Das Gebäude ist zusammengesetzt aus acht Würfeln der Kantenlänge 5 m.



**Zeichnet die Bodenfläche des Erdgeschosses. An allen vertikalen Außenkanten sollen Neonleuchten angebracht werden. Berechnet die Gesamtlänge dieser Kanten. Berechnet den Gesamtvolumen der vertikalen Außenfläche des Gebäudes.**

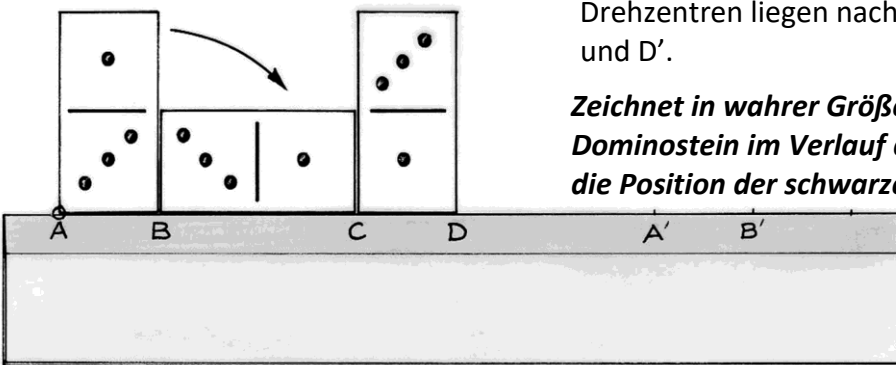
Aufgabe 5 7 P

**Im Steinumdrehen**

Ein Dominostein, der 4 cm lang und 2 cm breit ist, wird wie in der Abbildung an ein Lineal angelegt und insgesamt sieben Mal um die rechte untere Ecke gedreht. Der Stein dreht sich dabei um  $90^\circ$ . Die Drehzentren liegen nacheinander in den Punkten B, C, D, A', B', C' und D'.

**Zeichnet in wahrer Größe die acht verschiedenen Positionen, die der Dominostein im Verlauf der sieben Drehungen annimmt. Achtet auf die Position der schwarzen Punkte.**

**Welchen Weg legt der Punkt A dabei zurück? Fügt eurer Zeichnung die Bahn hinzu, die der Punkt A bei den Drehungen beschreibt, und berechnet ihre Länge.**



Aufgabe 6 5 P

**Im Flur**

Der Eingangsbereich in Saschas Haus ist quadratisch. Sascha möchte ihn fliesen und hat fünf quadratische Fliesen mit der Seitenlänge 50 cm gekauft. Eine Fliese lässt er ganz. Die anderen vier zerschneidet er in zwei Teile, jeweils von einer Seitenmitte zu einer gegenüberliegenden Ecke (siehe Abbildung). So erhält Sascha neun Teile, aus denen er ein Quadrat legen kann.

**Fertigt im Maßstab 1:10 die neun Teile an, legt sie zu einem Quadrat zusammen und klebt es auf euer Antwortblatt. Berechnet die exakte Länge einer Quadratseite.**





Aufgabe 7      7 P  
**Im Verzug**

Tante Yvonne hat zwei Wanduhren, die falsch gehen. Die erste geht vor, und zwar pro Stunde um zwei Minuten mehr. Die andere geht nach, und zwar pro Stunde um eine Minute mehr

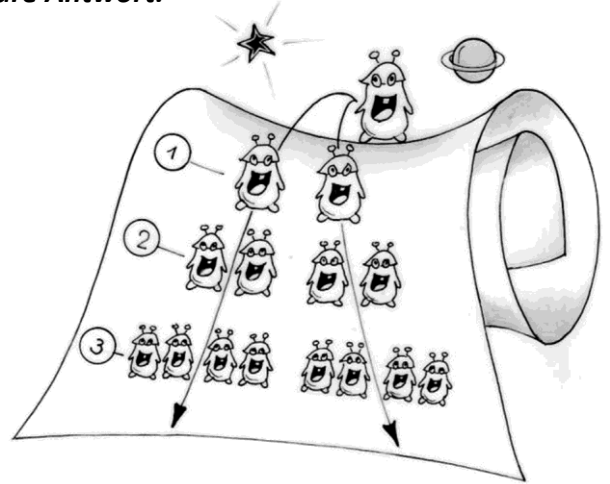
Um 12 Uhr mittags stellt Tante Yvonne bei beiden Uhren die Zeit korrekt ein.

**Wie lange dauert es, bis beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit anzeigen, wenn man sie nicht verstellt?**  
**Welche Uhrzeit zeigen die Uhren dann an?**  
**Begründet eure Antwort.**

Aufgabe 8      5 P  
**Im Weltraum**

In einem Paralleluniversum gibt es Lebewesen, die sich durch Klonen vermehren. Einmal im Jahr klont sich jedes Lebewesen. Aus einem Lebewesen werden auf diese Art zwei. Sobald ein Stamm aber aus mehr als 18 Lebewesen besteht, klonen sich in allen weiteren Jahren nur noch 18 von ihnen. Ein Stamm besteht zu Beginn aus nur einem Lebewesen.

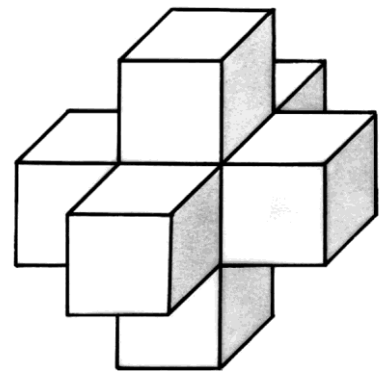
**Aus wie vielen Lebewesen besteht der Stamm nach zehn Jahren, wenn in dieser Zeit alle überleben?**  
**Begründet eure Antwort.**



Aufgabe 9      7 P  
**Im Netz**

Dieser Körper besteht aus gleich großen Würfeln.

**Wie viele Seitenflächen hat der Körper?**  
**Zeichnet ein Netz dieses Körpers, das auf ein DIN A4-Blatt passt.**

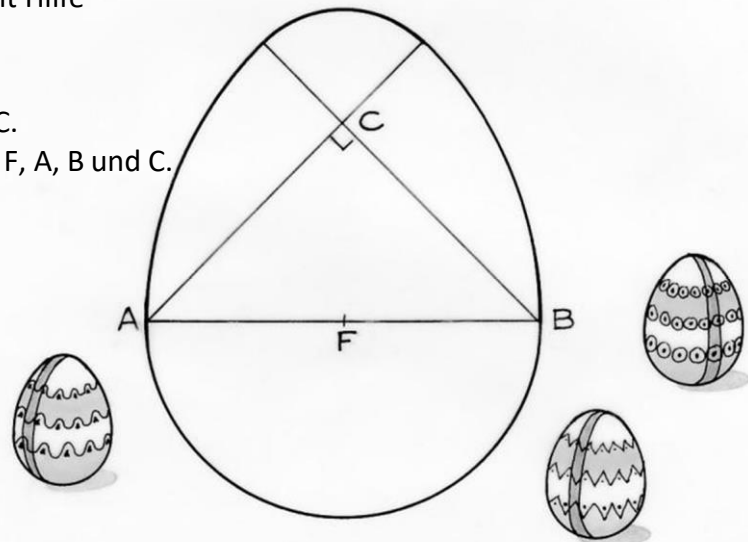


Aufgabe 10      10 P  
**Im Oval**

Ein Ei, wie es in der Abbildung dargestellt ist, könnt ihr mit Hilfe der folgenden Informationen zeichnen:

- Die Strecke AB ist 6 cm lang, und F ist ihr Mittelpunkt.
- Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig und rechtwinklig in C.
- Das Ei besteht aus vier Kreisbögen um die Mittelpunkte F, A, B und C.

**Zeichnet das Ei in wahrer Größe.**  
**Berechnet den Umfang des Eis.**  
**Rundet dabei auf Millimeter.**



# 10. Klasse

Aufgabe 11

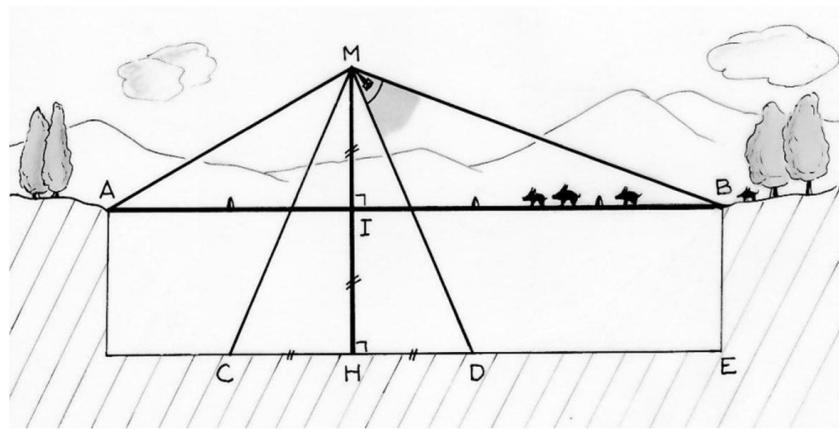
5 P

## Im Wald

Ein Architekt plant eine Brücke für den Wildwechsel. Die horizontale Brücke (die Strecke AB) wird von einem vertikalen Mast (der Strecke MH) getragen und von vier Stahlseilen gehalten (den Strecken MA, MC, MD und MB).

Die Strecke AI ist 20 m und die Strecke IB 30 m lang. Die Strecken MI, IH, CH und HD sind jeweils 10 m lang.

Im Punkt M befindet sich eine Kamera, die jedes Tier erfasst, das die Brücke überquert.



**Berechnet den Winkel DMB, der dem Sichtfeld der Kamera entspricht. Begründet eure Antwort.**

Aufgabe 12

7 P

## Im Quadrat

Delphine stellt Jean ein Rätsel:

„An welche natürliche Zahl denke ich?

Wenn ich zu meiner Zahl 10 addiere, erhalte ich eine Quadratzahl.

Und wenn ich zu meiner Zahl 79 addiere, erhalte ich wieder eine Quadratzahl.“

Jean denkt nach und antwortet:

„Es gibt nicht nur eine solche Zahl, es gibt zwei.“

**Gebt die beiden Lösungen an. Begründet eure Antwort.**

Aufgabe 13

10 P

## Im Verhältnis

Im Rechteck ABCD beträgt die Breite (die Länge der Strecke AB) 10 cm.

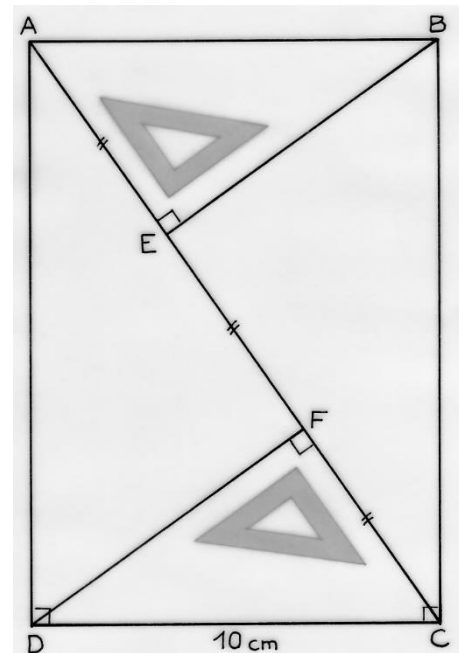
Die Punkte E und F liegen auf der Diagonalen AC.

Die Dreiecke AEB und DCF sind rechtwinklig.

Die Strecken AE, EF und FC sind gleich lang.

**Berechnet die exakte Länge der Strecke AD (die Länge des Rechtecks).**

**Konstruiert die Figur in wahrer Größe.**



## Probewettbewerb 2022 - Lösungshinweise

### Aufgabe 1 – In der Küche – 7 Punkte -

Zunächst wird in 40 Minuten der Gugelhupf vorbereitet. Er kommt dann für 50 Minuten in den Ofen. Währenddessen wird der Fisch zubereitet (insgesamt 60 Minuten lang). Nach 50 Minuten wird der Gugelhupf aus dem Ofen genommen. Nach weiteren 10 Minuten ist der Fisch fertig vorbereitet und kommt für 20 Minuten in den Ofen. Währenddessen wird mit der Vorbereitung des Hühnchens begonnen (insgesamt 30 Minuten). Nach 20 Minuten wird der Fisch aus dem Ofen genommen. Das Hühnchen wird in weiteren 10 Minuten fertig vorbereitet und kommt dann noch für 10 Minuten in den Ofen.

**Insgesamt dauert die Zubereitung des Menüs 140 Minuten oder 2 Stunden und 20 Minuten.**

| Zeit (in min) | 40           | 50           | 10 | 20           | 10 | 10   |
|---------------|--------------|--------------|----|--------------|----|------|
| Gugelhupf     | Vorbereitung | Ofen         |    |              |    |      |
| Fisch         |              | Vorbereitung |    | Ofen         |    |      |
| Hühnchen      |              |              |    | Vorbereitung |    | Ofen |

### Aufgabe 2 – In der Summe – 5 Punkte –

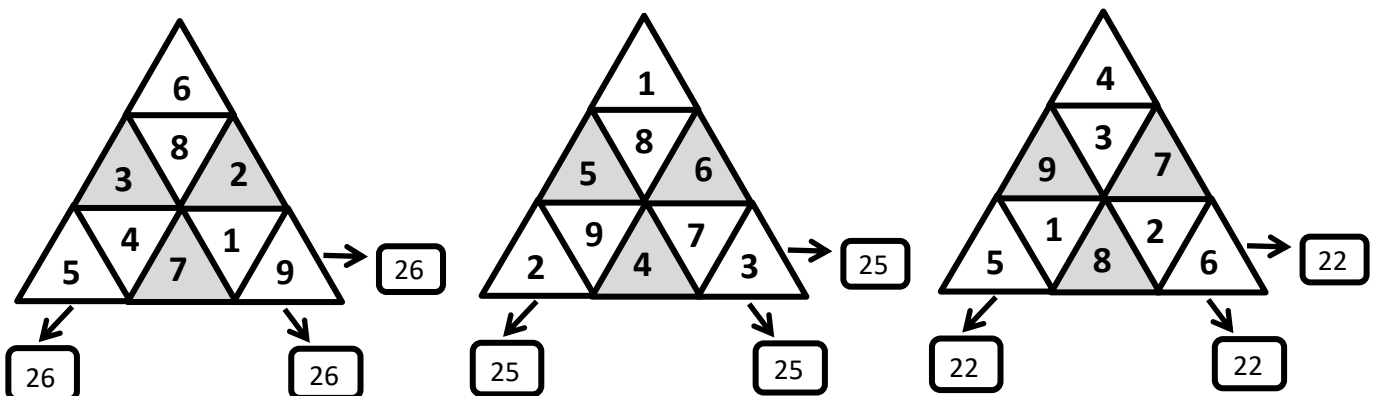
*Hinweis: Eine Lösung genügt, eine Begründung ist nicht verlangt.*

Wenn man die drei Summen, die sich entlang der Dreiecksseiten ergeben, addiert, zählt man sechs Zahlen doppelt (hier in den weißen Feldern) und drei Zahlen einfach (hier in den grauen Feldern).

Sei  $S$  die Summe der Zahlen entlang einer Dreiecksseite und  $T$  die Summe der Zahlen in den grauen Feldern. Dann gilt  $3S = 2(1 + 2 + \dots + 9) - T = 90 - T$

$T$  ist damit ein Vielfaches von 3. In den grauen Feldern müssen daher Zahlen stehen, deren Summe durch 3 teilbar ist.

Es gibt viele Lösungen. Hier sind drei Lösungen dargestellt für  $T = 12$  und damit  $S = 26$ ,  $T = 15$  und damit  $S = 25$  sowie  $T = 24$  und damit  $S = 22$ .



### Aufgabe 3 – In Paaren – 7 Punkte -

Die Summe der drei zweistelligen Zahlen ist kleiner als 300. Es gilt also  $a = 1$  oder  $a = 2$ .

Es soll gelten:

$$10a + b + 10b + c + 10c + a = 100a + 10b + c \Rightarrow b + 10c = 89a$$

- Aus  $a = 1$  folgt damit  $b = 9$  und  $c = 8$ .
- Aus  $a = 2$  folgt damit  $b = 8$  und  $c = 17$ . Da  $c \leq 9$  gilt, liefert das keine weitere Lösung.

Es gibt genau eine dreistellige Zahl, die diese Gleichung erfüllt, nämlich **198**. ( $19 + 98 + 81$ ).

### Aufgabe 4 – Im Neonlicht – 5 Punkte -

Die Skizzen zeigen jeweils links den Grundriss des Erdgeschosses und rechts den Grundriss des oberen Stockwerks. Das kleine Rechteck links außen stellt die Bank dar.

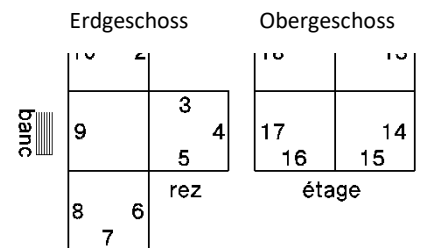
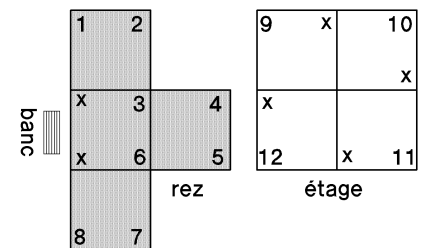
- Die Bodenfläche des Erdgeschosses besteht aus 4 Quadraten.
- In den beiden oberen Grundrissen sind die vertikalen Außenkanten mit den Ziffern 1-12 bezeichnet. Die mit x bezeichneten Kanten sind keine Außenkanten des Körpers. Der Körper hat 12 vertikale Außenkanten der Länge 5m.

**Die Gesamtlänge dieser Kanten beträgt 60 m.**

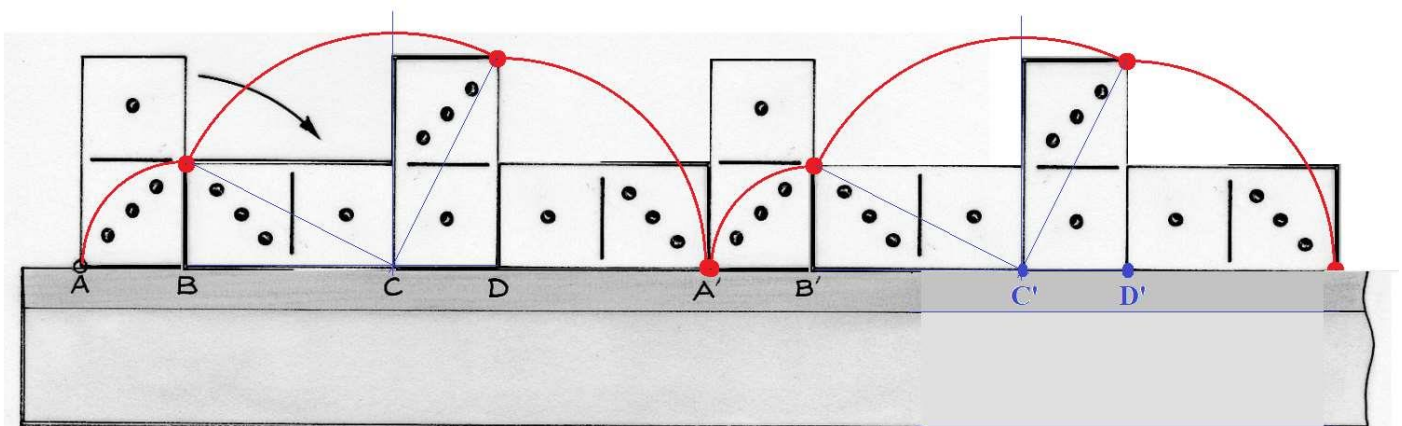
- In den beiden unteren Grundrissen sind die einzelnen quadratischen vertikalen Außenflächen mit den Ziffern 1 – 18 bezeichnet

**Die gesamte vertikale Außenfläche beträgt**

$$18 \cdot 25 \text{ m}^2 = 450 \text{ m}^2.$$



### Aufgabe 5 – Im Steinumdrehen – 7 Punkte -

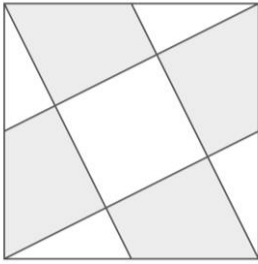


Die Länge der Bahn ist die Summe der Längen der sieben Kreisbögen, deren Radien nacheinander  $2, 2\sqrt{5}, 4, 0, 2, 2\sqrt{5}$  und  $4$  betragen.

**Die Länge der Bahn beträgt  $(\pi + \pi\sqrt{5} + 2\pi) \cdot 2 \text{ cm} \approx 32,90 \text{ cm}$ .**

Eine Zeichnung in wahrer Größe befindet sich im Anhang.

### Aufgabe 6 – Im Flur – 5 Punkte -



Fläche der fünf quadratischen Fliesen:

$$5 \cdot 50^2 = 12\,500 \text{ cm}^2$$

Seitenlänge des Quadrats:  $\sqrt{12\,500} \text{ cm}$  ( $\approx 111,8 \text{ cm}$ )

*Eine Zeichnung im Maßstab 1 :10 befindet sich im Anhang.*

### Aufgabe 7 – Im Verzug – 7 Punkte -

Die analogen Uhren unterscheiden nicht zwischen Uhrzeiten nach Mitternacht und Uhrzeiten nach 12 Uhr mittags (a.m. und p.m.).

Nach einer Stunde liegen die angezeigten Uhrzeiten 3 Minuten auseinander, nach zwei Stunden 6 Minuten usw. Nach 20 Stunden liegen die angezeigten Uhrzeiten also 60 Minuten, das heißt 1 Stunde auseinander.

Die beiden Uhren zeigen zum ersten Mal wieder dieselbe Uhrzeit an, wenn sie genau 12 Stunden auseinanderliegen, also nach  $12 \cdot 20 \text{ h} = 240 \text{ h}$  oder 10 Tagen.

Die eine Uhr geht dann  $240 \cdot 2 \text{ Minuten} = 480 \text{ Minuten}$  vor, also 8 Stunden.

Die andere Uhr geht dann 240 Minuten nach, also 4 Stunden.

Nach 10 Tagen ist es wieder genau 12 Uhr mittags. Beide Uhren zeigen dann 8 Uhr an.

**Nach genau 10 Tagen zeigen beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit an – 8 Uhr.**

### Aufgabe 8 – Im Weltraum – 5 Punkte -

Nach 4 Jahren besteht der Stamm aus  $2^4 = 16$  Lebewesen, nach 5 Jahren besteht er aus  $2^5 = 32$  Lebewesen.

Danach steigt die Anzahl der Lebewesen pro Jahr um 18.

**Nach 10 Jahren besteht der Stamm aus  $32 + 5 \cdot 18 = 112$  Lebewesen.**

Der Sachverhalt kann auch in einer Tabelle dargestellt werden.

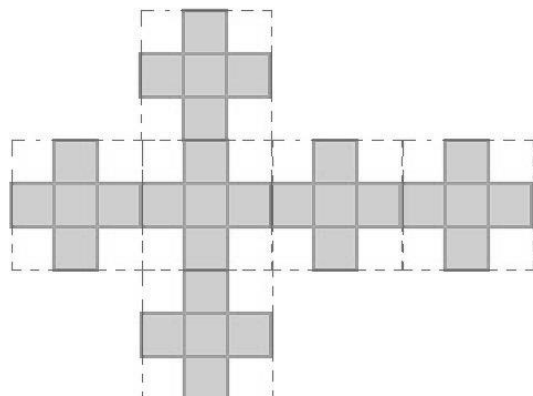
|            |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |
|------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Jahr       | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
| Individuen | 2  | 4  | 8  | 16 | 32  | 40  | 58  | 76  | 94  | 112 |
| Zunahme    | +1 | +2 | +4 | +8 | +16 | +18 | +18 | +18 | +18 | +18 |

### Aufgabe 9 – Im Netz – 7 Punkte -

Hier ist ein mögliches Netz dargestellt.

**Der Körper hat 30 Seitenflächen.**

*Ein Netz in wahrer Größe auf einem DIN A4-Blatt befindet sich im Anhang.*





### Aufgabe 10 – Im Oval – 10 Punkte -

Im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck ABC gilt mit Pythagoras

$$AC = BC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Wegen  $BE = AB = 6 \text{ cm}$  gilt  $CE = 6 - 3\sqrt{2} \text{ cm}$

$$\text{Länge des Kreisbogens von E nach F: } \frac{1}{4}(6 - 3\sqrt{2}) \cdot 2\pi = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi$$

Der Halbkreisbogen von A nach B misst  $3\pi$ .

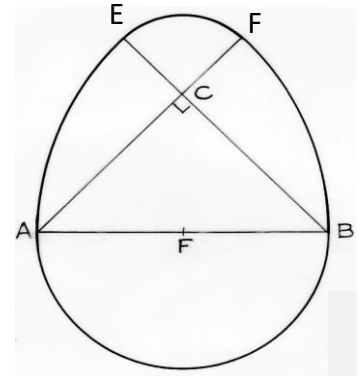
Länge der Kreisbögen von A nach E und von F nach B:

$$\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 6\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Umfang des Eis: } U = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi + 3\pi + 2 \cdot \frac{3}{2}\pi = 9\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$$

**Der Umfang des Eis beträgt ungefähr 21,6 cm.**

*Eine Zeichnung in wahrer Größe befindet sich im Anhang.*



### Aufgabe 11 – Im Wald – 5 Punkte -

#### Möglichkeit 1: Mit Pythagoras

Im Dreieck MHD gilt  $MD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$

Im Dreieck MIB gilt  $MB^2 = 10^2 + 30^2 = 1000$

Im Dreieck BDE gilt  $BD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$

Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist das Dreieck MDB rechtwinklig in D.

Und es ist gleichschenkelig.

**Der Winkel DMB beträgt daher  $45^\circ$ .**

#### Möglichkeit 2: Trigonometrisch

$$\tan \widehat{IMB} = \tan \widehat{HMB} = \frac{IB}{IM} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\tan \widehat{HMD} = \frac{HD}{MH} = \frac{10}{20} = 0,5$$

$$\widehat{DMB} = \text{Arctan}(3) - \text{Arctan}(0,5) = 45^\circ$$



## Aufgabe 12 – Im Quadrat – 7 Punkte -

Sei  $n$  die Zahl, an die Delphine denkt.

Es gibt zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $n + 10 = a^2$  und  $n + 79 = b^2$ .

Durch Subtrahieren erhält man  $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = 69$ .

69 lässt sich nur auf zwei Arten in Faktoren zerlegen:  $69 = 1 \cdot 69$  und  $69 = 3 \cdot 23$ .

### 1. Fall ( $69 = 1 \cdot 69$ )

$$\begin{aligned} b + a &= 69 \\ b - a &= 1 \end{aligned} \quad \text{Die Lösung des LGS ist } b = 35 \text{ und } a = 34.$$

Man erhält  $n = 34^2 - 10 = 1146$  und  $n = 35^2 - 79 = 1146$

### 2. Fall ( $69 = 3 \cdot 23$ )

$$\begin{aligned} b + a &= 23 \\ b - a &= 3 \end{aligned} \quad \text{Die Lösung des LGS ist } b = 13 \text{ und } a = 10.$$

Man erhält  $n = 10^2 - 10 = 90$  und  $n = 13^2 - 79 = 90$

**Die Zahl, an die Delphine denkt, ist entweder 90 oder 1146.**

*Bemerkung: Die Aufgabe kann auch durch geschicktes Probieren oder die Verwendung der Beziehung  $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$  gelöst werden. (Damit ergibt sich  $2a + 1 = 69$  und  $a = 34$ .)*

## Aufgabe 13 – Im Verhältnis – 10 Punkte -

Die Dreiecke AFD, BEA und ADC sind ähnlich, weil ihre Winkel gleich groß sind.

Daher sind die Verhältnisse entsprechender Seitenlängen gleich:

$$\frac{DF}{FC} = \frac{AF}{DF} = \frac{AD}{DC}$$

(Seitenlänge der jeweils längeren durch Seitenlänge der jeweils kürzeren Kathete)

Sei  $FC = x$ . Mit  $FC = AE = EF$  folgt  $AF = 2x$ .

$$\text{Man erhält } \frac{DF}{x} = \frac{2x}{DF}$$

Es ergibt sich  $2x^2 = DF^2$  und  $x = DF/\sqrt{2}$

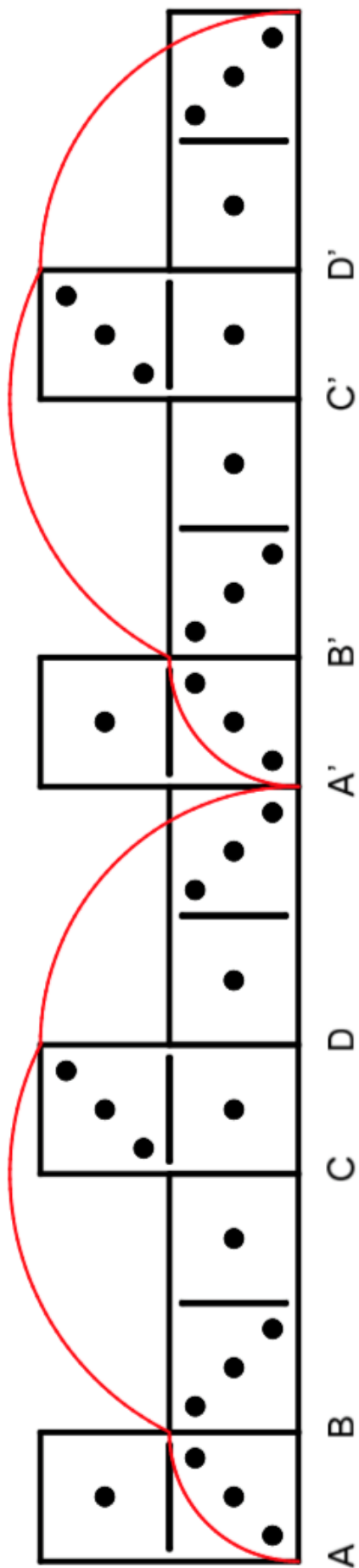
$$\frac{AD}{DC} = \frac{DF}{FC} = \frac{DF}{x} = = \frac{DF}{\frac{DF}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{DC} = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad DC = 10 \Rightarrow AD = 10\sqrt{2}$$

**Die exakte Länge der Strecke AD beträgt  $10\sqrt{2}$**

*Im Anhang befindet sich eine Zeichnung in wahrer Größe.*

Anhang zu Aufgabe 5 - *Im Steinumdrehen*

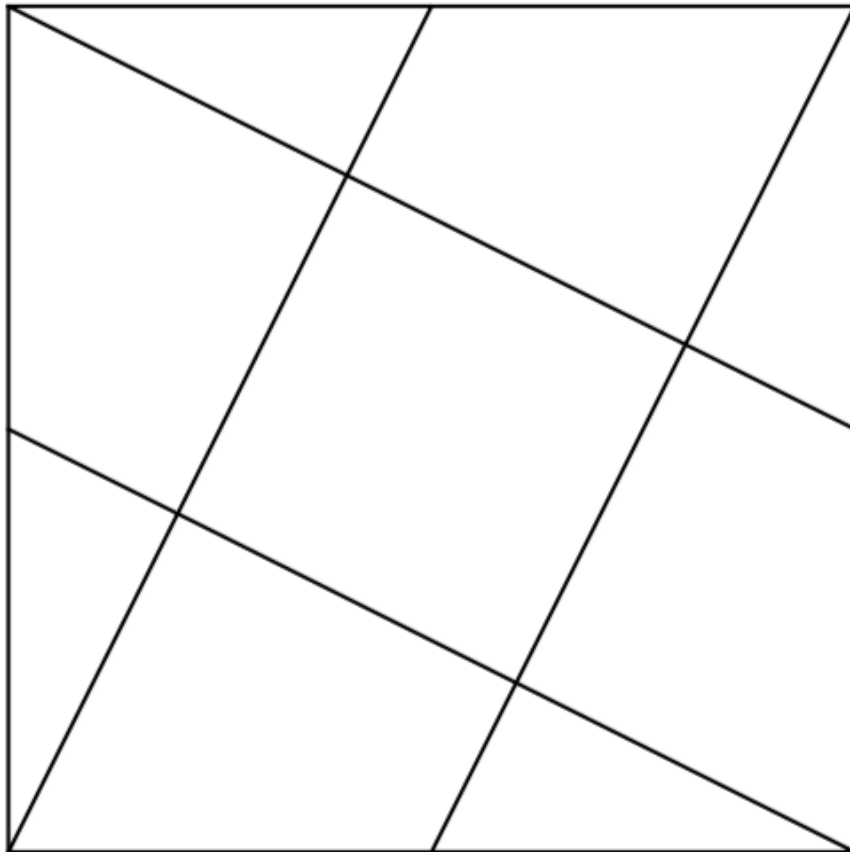


Wahre Größe

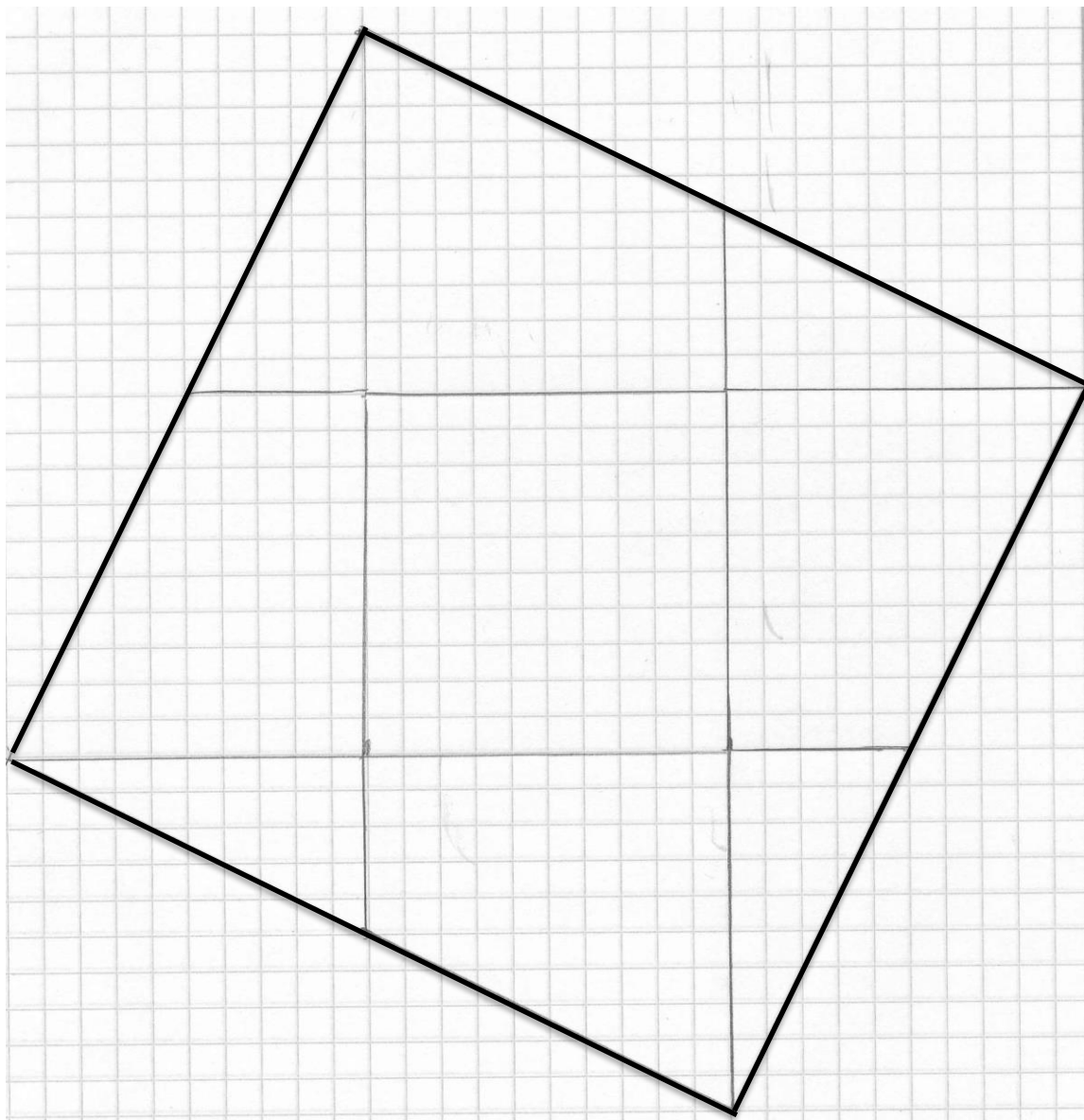
## Anhang zu Aufgabe 6 - Im Flur

**Maßstab 1:10**

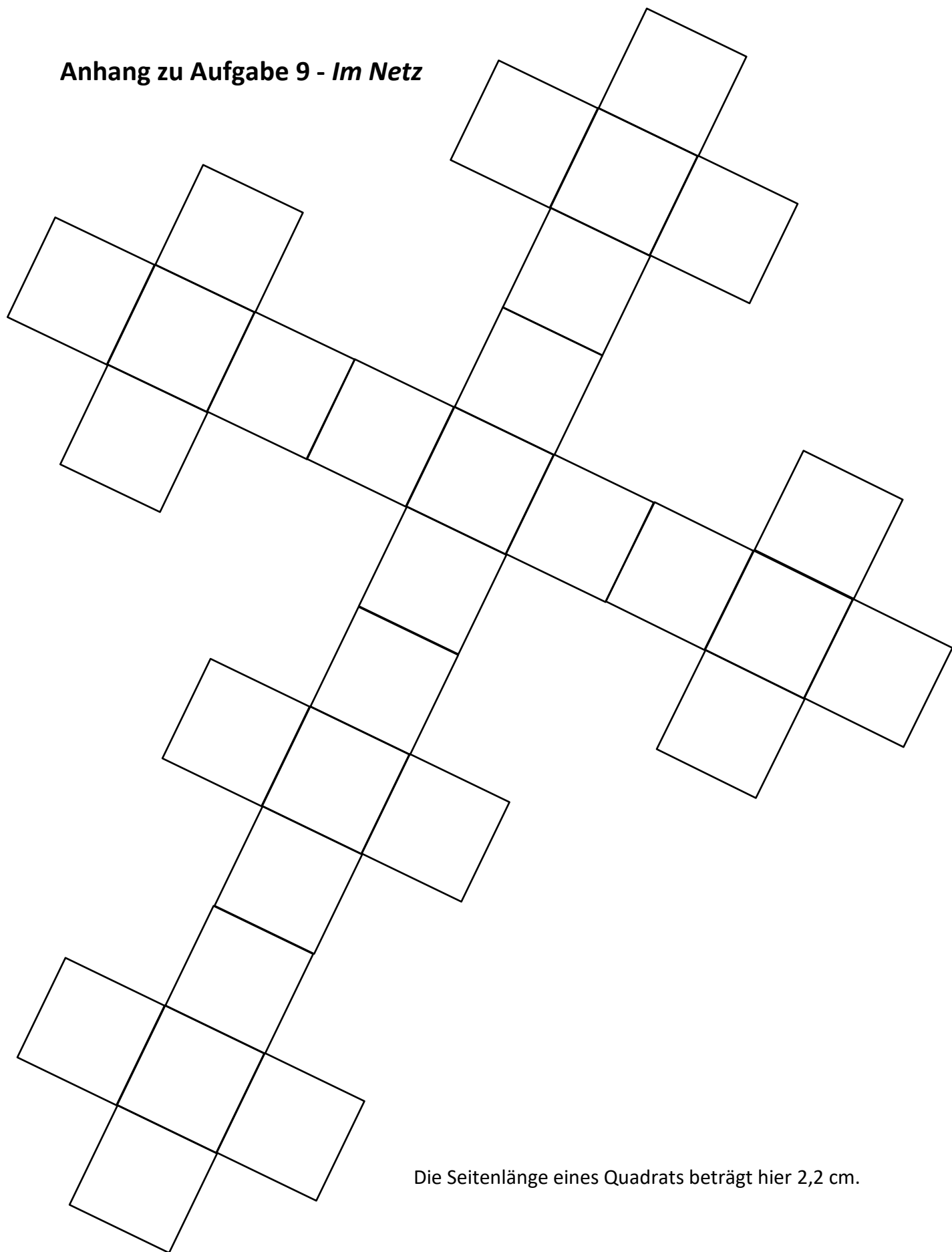
Die Seitenlänge des Quadrats beträgt ungefähr 11,2 cm



Auf kariertem Papier :



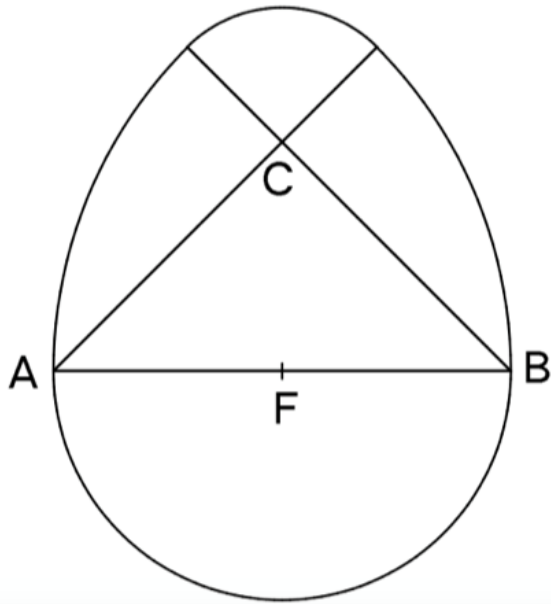
**Anhang zu Aufgabe 9 - Im Netz**



Die Seitenlänge eines Quadrats beträgt hier 2,2 cm.

## Anhang zu Aufgabe 10 - *Im Oval*

wahre Größe



## Anhang zu Aufgabe 13 - Im Verhältnis

### Wahre Größe

Hinweis:

Man zeichnet ein Quadrat der Seitenlänge 10 cm, verlängert eine Seite und trägt dann die Länge der Diagonalen des Quadrats ab.

### Wahre Größe

