

# Mathematik Ohne Grenzen



## Hauptwettbewerb 2026

Mathématiques  
SANS  
Frontières

- ✓ Für jede Aufgabe, auch für eine nicht bearbeitete, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- ✓ Auch fehlerhafte oder unvollständige Lösungen werden berücksichtigt.
- ✓ Die Sorgfalt der Darstellung sowie Qualität und Präzision der Begründungen werden mit bewertet.

Verfasst in einer der vier Fremdsprachen einen Lösungstext mit mindestens 30 Wörtern.

### Aufgabe 1 7 Punkte Wankelmütig

Un petit garçon est très lunatique. Le jeudi et le vendredi il dit toujours la vérité. Le mardi, il ment toujours. Les autres jours, il ment ou dit la vérité au hasard. On lui demande son prénom six jours consécutifs. Voici dans l'ordre ses réponses : Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio.

**Comment s'appelle le petit garçon ? Expliquer votre raisonnement.**

Un ragazzino è molto lunatico. Dice sempre la verità il giovedì e il venerdì. Mente sempre il martedì, mentre gli altri giorni mente o dice la verità a caso. Gli si chiede il nome per sei giorni consecutivi. Ecco, nell'ordine, le sue risposte: Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio.

**Come si chiama questo ragazzino? Illustrate il vostro ragionamento.**



Un niño es muy lunático. El jueves y el viernes dice siempre la verdad. El martes, miente siempre. Los demás días, miente o dice la verdad al azar. Le preguntamos su nombre seis días consecutivos. Estas son, por orden sus respuestas: Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio.

**¿Cómo se llama el niño? Justifica tu respuesta.**

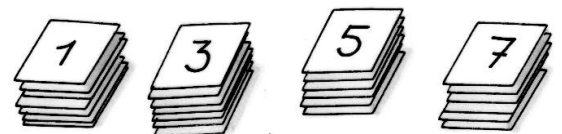
A little boy is very moody. On Thursdays and Fridays, he always tells the truth. On Tuesdays, he always lies. On other days, he lies or tells the truth at random. He is asked his name for six consecutive days. Here are his answers, in order: Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio.

**What is the little boy's name? Explain your reasoning.**

### Aufgabe 2 5 Punkte Keine 9

Die Zahlen 1 357, 3 157, 5 713, 7 315 kann man aufschreiben, wenn man jede der vier ungeraden Ziffern 1, 3, 5 und 7 genau einmal verwendet.

**Bestimmt die Summe aller Zahlen, die man auf diese Art aufschreiben kann. Begründet eure Antwort.**

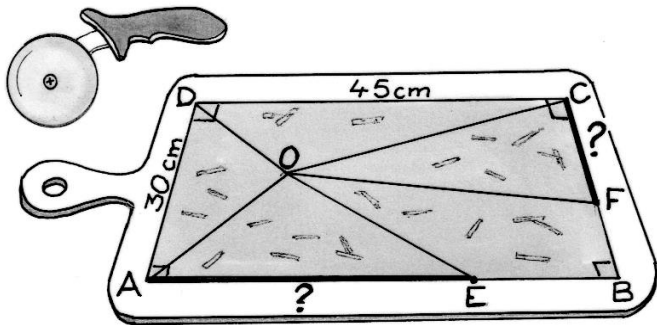


**Aufgabe 3 7 Punkte**  
**Flammkuchen**

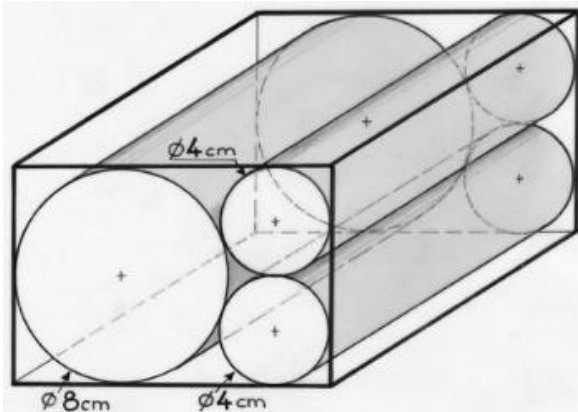
Nach getaner Arbeit treffen sich die Organisatoren dieses Wettbewerbs gerne zum Flammkuchenessen. Eines Abends soll dabei ein Flammkuchen gerecht in fünf Teile geteilt werden.

Die Abbildung zeigt, wie Michel den rechteckigen Flammkuchen so teilt, dass alle fünf Teile denselben Flächeninhalt haben.

**Berechnet die Länge der Strecken AE und CF. Begründet eure Lösungen.**



**Aufgabe 5 7 Punkte**  
**In die Röhren gucken**

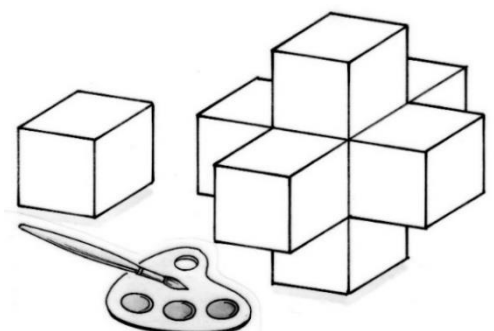


**Zeichnet in wahrer Größe die Vorderansicht der Schachtel mit den drei Kreisen (den Grundkreisen der Röhren). Bestimmt die Maße der Schachtel. Erklärt eure Lösungen.**

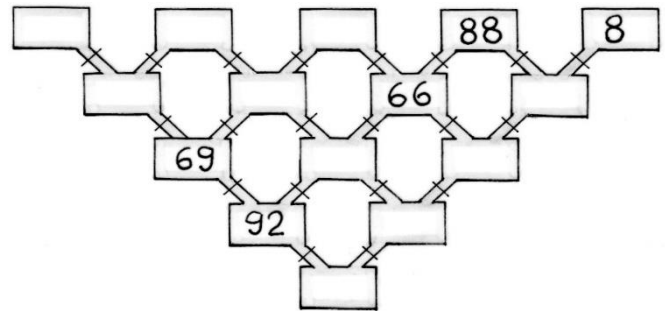
**Aufgabe 6 5 Punkte**  
**Gelb – blau - rot**

Wir haben Würfel der Kantenlänge 1 cm in verschiedenen Farben. Wir nehmen einen gelben Würfel und kleben auf jede seiner Seitenflächen einen blauen Würfel. Die Farbe gelb ist jetzt nicht mehr zu sehen. (siehe Abbildung) Dann kleben wir auf jede der blauen Seitenflächen des so entstandenen Körpers einen roten Würfel. Die Farbe blau ist jetzt nicht mehr zu sehen.

**Zeichnet die Vorderansicht des Körpers, den wir am Ende erhalten. Wie viele rote Würfel wurden aufgeklebt? Wie viele Seitenflächen vom Flächeninhalt 1 cm<sup>2</sup> hat dieser Körper insgesamt?**



**Aufgabe 4 5 Punkte**  
**Wasser marsch!**



Die Abbildung zeigt 15 Wasserbehälter.

Zu Beginn sind nur die fünf Behälter der obersten Etage mit Wasser gefüllt. Dann werden in dieser Etage die Schleusen geöffnet, und das Wasser fließt in die vier Behälter der Etage darunter. Wenn sich das gesamte Wasser in dieser Etage befindet, werden dort die Schleusen geöffnet, und das Wasser fließt in die Etage darunter, und so weiter.

Ist ein Behälter mit nur einem Behälter der nächstunteren Etage verbunden, so fließt das gesamte Wasser, das er enthält, in diesen darunterliegenden Behälter.

Ist ein Behälter mit zwei darunterliegenden Behältern verbunden, so fließt jeweils die Hälfte des Wassers, das er enthält, in jeden der beiden darunterliegenden Behälter.

Auf einigen Behältern ist die Wassermenge angegeben, die sie enthalten, bevor die Schleusen zur nächstunteren Etage geöffnet werden.

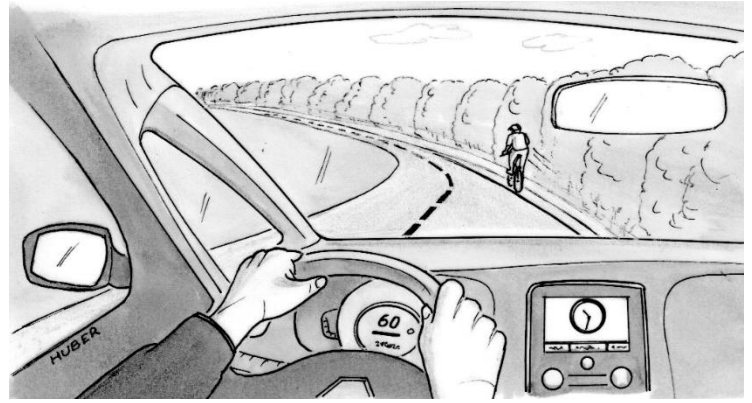
**Zeichnet die Figur ab und schreibt auf jeden Behälter die Wassermenge, die er enthält, bevor die Schleusen zur nächstunteren Etage geöffnet werden.**

Luc fertigt eine durchsichtige quaderförmige Schachtel an.

Er legt, wie in der Abbildung ersichtlich, drei 10 cm lange zylinderförmige Röhren hinein. Sie passen ganz genau in die Schachtel. Eine der drei Röhren hat den Durchmesser 8 cm, die anderen beiden haben den Durchmesser 4 cm.

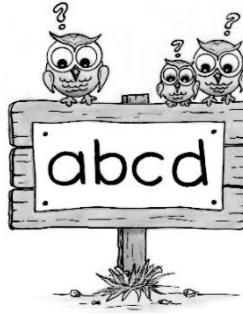
**Aufgabe 7**      7 Punkte  
**Pack die Badehose ein**

Patrick fährt mit dem Fahrrad in das 15 km entfernte Schwimmbad. Seine Geschwindigkeit beträgt konstant 12 km/h. Zu Hause bemerkt sein Vater etwas später, dass Patrick die Badehose vergessen hat. Er möchte seinem Sohn die Badehose bringen und fährt genau 30 Minuten später als Patrick mit dem Auto los, seinem Sohn hinterher. Seine Geschwindigkeit beträgt konstant 60 km/h.



**Welche Strecke hat Patrick bereits zurückgelegt, als sein Vater losfährt?  
 Wie lange braucht Patricks Vater, um seinen Sohn einzuholen? Begründet eure Antwort.**

**Aufgabe 8**      5 Punkte  
**Selbstbezogen**

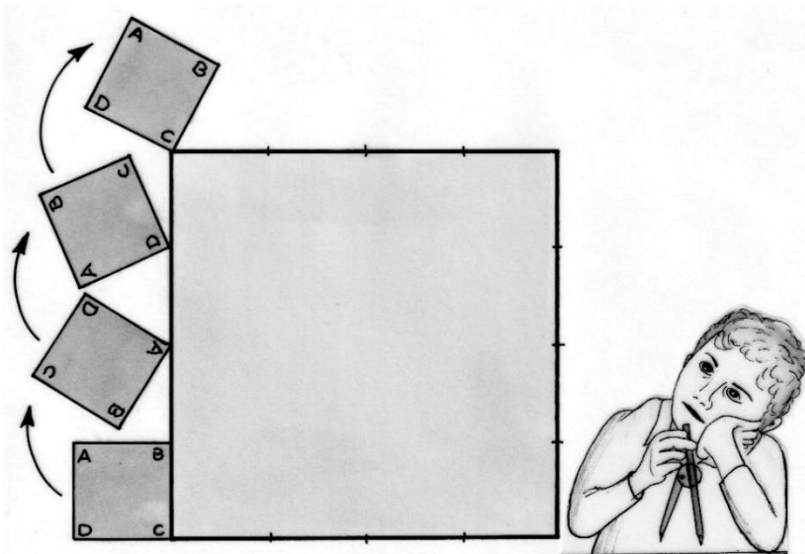


Wir suchen die vierstelligen Zahlen **abcd**, für die gilt:

- Die erste Ziffer **a** gibt an, wie oft die Ziffer 0 in der Zahl vorkommt.
- Die zweite Ziffer **b** gibt an, wie oft die Ziffer 1 in der Zahl vorkommt.
- Die dritte Ziffer **c** gibt an, wie oft die Ziffer 2 in der Zahl vorkommt.
- Die vierte Ziffer **d** gibt an, wie oft die Ziffer 3 in der Zahl vorkommt.

**Bestimmt die vierstelligen Zahlen mit den oben aufgeführten Eigenschaften.**

**Aufgabe 10**      10 Punkte  
**Quadratwalzer**



**Stellt in vier Zeichnungen die vier verschiedenen Bahnen dar, welche die Eckpunkte A, B, C und D durchlaufen. Bei welchem Eckpunkt ist die Bahn, die er durchläuft, am kürzesten? Begründet eure Antwort. Berechnet die Länge dieser kürzesten Bahn.**

**Aufgabe 9**      7 Punkte  
**Patisserie**

Ein Konditor präsentiert in seinem Schaufenster die Schachteln mit den Macarons auf Tablett in Form eines Viertelkreises.

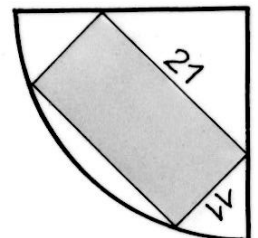
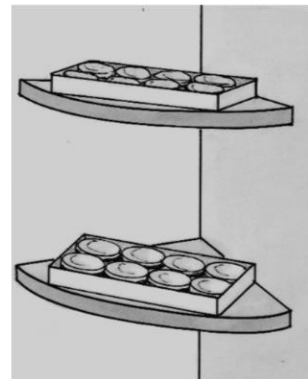
(siehe Abbildung rechts)

Die vier Eckpunkte jeder rechteckigen Schachtel-Grundfläche liegen genau auf dem Rand des jeweiligen Tablett.

(siehe Abbildung unten)

Die rechteckige Grundfläche der Macaron-Schachteln ist 21 cm lang und 11 cm breit.

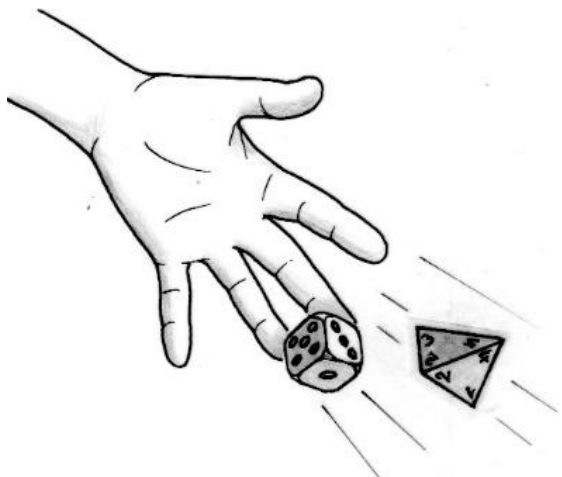
**Die Tablett haben die Form eines Viertelkreises. Berechnet den Radius dieses Viertelkreises. Erklärt eure Rechnung.**



Ein Quadrat ABCD der Kantenlänge 2 cm dreht sich um ein großes Quadrat der Kantenlänge 8 cm. Dabei bleibt immer jeweils ein Eckpunkt des kleinen Quadrats in Kontakt mit dem großen Quadrat, und um diesen Eckpunkt dreht sich das kleine Quadrat, bis es wieder am großen Quadrat anliegt. Bei der folgenden Drehung bleibt der nächste Eckpunkt des kleinen Quadrats in Kontakt mit dem großen Quadrat usw. Die ersten Etappen dieser Drehbewegung des kleinen Quadrats um das große Quadrat sind in der Abbildung dargestellt. Wenn das kleine Quadrat sich nach der Drehbewegung um das große Quadrat wieder an seiner Ausgangsposition befindet, hat jeder seiner Eckpunkte eine eigene Bahn durchlaufen.

# Klasse 10

## Aufgabe 11 5 Punkte Wer hat Recht?



Michaël hat zwei verschiedene Würfel: Einen fairen sechseitigen Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 und einen fairen vierseitigen Würfel, mit dem man die Augenzahlen 1 bis 4 wurffeln kann. (Die gewürfelte Augenzahl wird an der Spitze abgelesen).

Michaël wirft gleichzeitig beide Würfel und addiert die beiden Augenzahlen, die er gewurffelt hat.

Er behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Summe 5 doppelt so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für die Summe 9.

Seine Freundin Stéphanie behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Summe 6 doppelt so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für die Summe 9.

**Wer hat Recht? Begründet eure Antwort.**

## Aufgabe 12 7 Punkte Kaprekar

Dattatreya Ramachandra Kaprekar, ein indischer Mathematiker (1905 -1986), verblüffte seine Bekannten gerne mit dem folgenden Spiel:

1. Wähle unter den Ziffern von 0 - 9 drei verschiedene Ziffern aus.
2. Bilde mit diesen Ziffern die größtmögliche Zahl.
3. Bilde mit diesen Ziffern die kleinstmögliche Zahl.
4. Berechne die Differenz der beiden Zahlen.
5. Notiere das Ergebnis.

Beginne dann mit den drei Ziffern des Ergebnisses wieder bei Punkt 2.

Nach fünf Durchgängen kann ich dir sagen, welche Zahl du als Ergebnis notiert hast.“

**Spielt das Spiel mehrmals, jeweils mit anderen Ausgangsziffern, und dokumentiert eure Spiele auf dem Antwortblatt.**

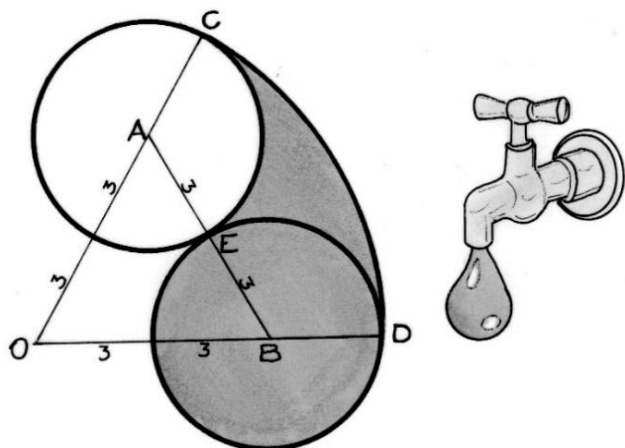
**Was stellt ihr fest? Welche Zahl nennt Kaprekar seinen Bekannten?**

**Zeigt, dass alle bei Punkt 5 notierten Ergebnisse Vielfache von 99 sind.**



Mathématiques  
SANS  
Frontières

## Aufgabe 13 10 Punkte Tropfen



Ausgehend von dem gleichseitigen Dreieck OBA mit der Seitenlänge 6 cm wurde die graue Figur konstruiert. Sie erinnert an einen Tropfen.

Die Punkte C und D liegen auf demselben Kreis um den Mittelpunkt O

A und B sind die Mittelpunkte der Kreise mit dem Radius 3 cm.

**Berechnet den Flächeninhalt der grauen Figur. Dokumentiert und begründet eure Rechnungen.**

# Hauptwettbewerb 2026

## Lösungshinweise

### Bewertungsvorschlag

#### Aufgabe 1 – Wankelmütig – 7 Punkte –

Donnerstags und freitags sagt der kleine Junge die Wahrheit.

An diesen beiden aufeinanderfolgenden Tagen muss seine Antwort auf die Frage nach seinem Namen also dieselbe sein.

Unter den im Aufgabentext aufgeführten Antworten gibt es aber keine zwei aufeinanderfolgenden identischen Antworten.

Daher gibt der kleine Junge entweder die letzte Antwort Elio an einem Donnerstag oder die erste Antwort Sacha an einem Freitag.

Der erste Fall (wahre Antwort Elio am Donnerstag) kann ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall gibt der kleine Junge am Dienstag, zwei Tage vor dem Donnerstag, auch die Antwort Elio.

Dienstags lügt er aber, was zu einem Widerspruch führt.

Daher gibt der kleine Junge die erste Antwort Sacha an einem Freitag und sagt damit die Wahrheit.

**Der kleine Junge heißt Sacha.**

#### Bewertungsvorschlag:

1 Punkt für die richtige Lösung Sacha

3 Punkte für die Erklärung

3 Punkte für die sprachliche Qualität



#### Aufgabe 2 – Keine 9 – 5 Punkte –

Wenn man jede der vier Ziffern 1, 3, 5 und 7 genau einmal verwendet, kann man  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  vierstellige Zahlen schreiben.

An jeder Stelle (Tausender, Hunderter, Zehner, Einer) erscheint jede Ziffer dabei  $24 : 4 = 6$  Mal.

Bei der Addition der 24 Zahlen kann man alle 24 Tausenderziffern addieren und sie mit 1000 multiplizieren, alle 24 Hunderterziffern addieren und sie mit 100 multiplizieren, alle 24 Zehnerziffern addieren und sie mit 10 multiplizieren und alle 24 Einerziffern addieren.

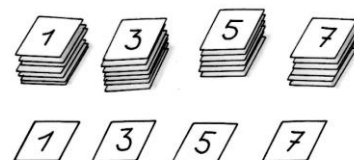
An jeder Stelle (Tausender, Hunderter, Zehner, Einer) ist die Summe der 24 Ziffern

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 6 \cdot 16 = 96.$$

Die Summe der 24 Zahlen ist also

$$96 \cdot 1000 + 96 \cdot 100 + 96 \cdot 10 + 96 \cdot 1 = 96 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 96 \cdot 1111 = 106\ 656$$

**Die Summe aller vierstelligen Zahlen, die man aufschreiben kann, wenn man jede der Ziffern 1, 3, 5 und 7 genau einmal verwendet, ist 106 656.**



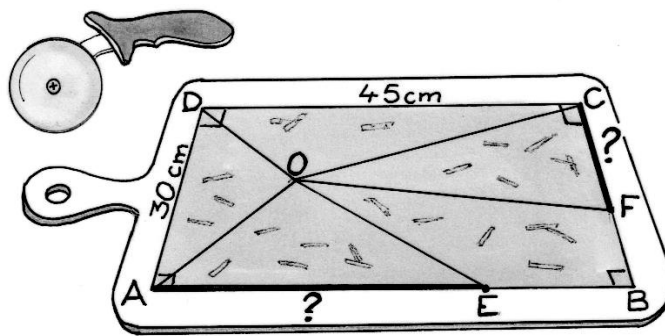
#### Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Lösung 106 656

3 Punkte für die Begründung

*Bemerkung: Es wird akzeptiert, wenn alle 24 Zahlen aufgeschrieben und mit dem Taschenrechner addiert wurden.*

### Aufgabe 3 – Flammkuchen – 7 Punkte –



Die Fläche des gesamten Rechtecks beträgt  $45 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 1\,350 \text{ cm}^2$ .

Die Fläche jedes Teilstücks beträgt also  $1\,350 \text{ cm}^2 : 5 = 270 \text{ cm}^2$ .

Im Dreieck DAO sei  $h_1$  die Höhe über der Strecke DA (ausgehend vom Punkt O). Es gilt

$$\frac{30 \cdot h_1}{2} = 270$$

und  $h_1 = 18 \text{ [cm]}$ .

Im Dreieck OFC beträgt die Höhe  $h_2$  über der Strecke FC (ausgehend von O) damit  $45 - 18 = 27 \text{ [cm]}$ .

Es gilt

$$\frac{\overline{CF} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{CF} \cdot 27}{2} = 270$$

und  $\overline{CF} = 20 \text{ [cm]}$ .

Im Dreieck DOC, sei  $h_3$  die Höhe über der Strecke DC (ausgehend von O). Es gilt

$$\frac{45 \cdot h_3}{2} = 270$$

und  $h_3 = 12 \text{ [cm]}$ .

Im Dreieck AEO beträgt die Höhe  $h_4$  über der Strecke AE (ausgehend von O) damit  $30 - 12 = 18 \text{ [cm]}$ .

Es gilt

$$\frac{\overline{AE} \cdot h_4}{2} = \frac{\overline{AE} \cdot 18}{2} = 270$$

$\overline{AE} = 30 \text{ [cm]}$ .

**Die Länge der Strecke AE beträgt 30 cm, die Länge der Strecke CF beträgt 20 cm.**

#### Bewertungsvorschlag:

1,5 Punkte für die Länge der Strecke AE

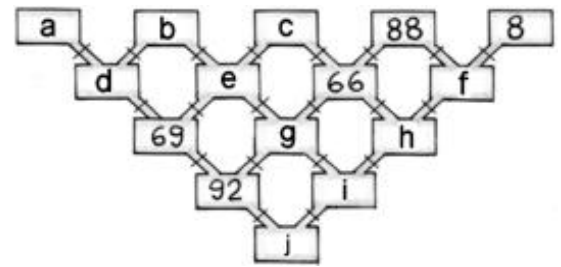
2 Punkte für die Begründung

1,5 Punkte für die Länge der Strecke CF

2 Punkte für die Begründung

## Aufgabe 4 – Wasser marsch! – 5 Punkte –

Wir benennen die Wassermengen in den einzelnen Behältern vor dem Öffnen der jeweiligen Schleusen wie in der Abbildung rechts.



**f** ist 8 plus die Hälfte von 88, also **f = 52**.

**h** ist 52 plus die Hälfte von 66, also **h = 85**.

In den Behälter mit der Wassermenge 66 ist die Hälfte von **c** und die Hälfte von 88 geflossen.

->  $66 = \frac{c}{2} + 44$ , also  $\frac{c}{2} = 22$  und **c = 44**.

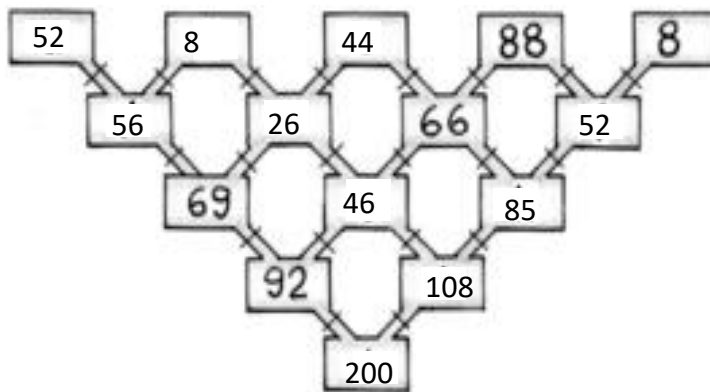
In den Behälter mit der Wassermenge 92 ist die Hälfte von **g** und 69 geflossen.

->  $92 = \frac{g}{2} + 69$ , also  $\frac{g}{2} = 23$  und **g = 46**.

In den Behälter mit der Wassermenge **g = 46** ist die Hälfte von **e** und die Hälfte von 66 geflossen.

->  $46 = \frac{e}{2} + 33$ , also  $\frac{e}{2} = 13$  und **e = 26**.

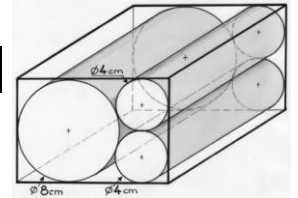
Wenn man auf dieselbe Art fortfährt, erhält man folgende Lösung:



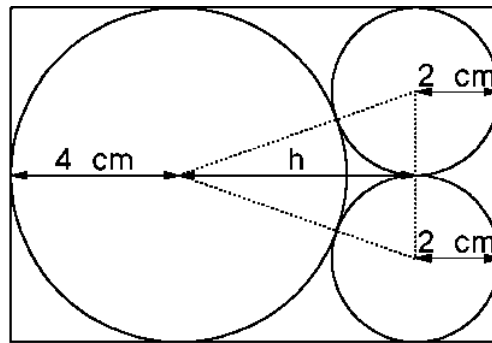
### **Bewertungsvorschlag:**

0,5 Punkte für jede der 10 zu bestimmenden Wassermengen  
*Die Berechnung/ Begründung ist nicht verlangt.*

## Aufgabe 5 – In die Röhren gucken – 7 Punkte –



Vorderansicht der Schachtel:



Die **Höhe der Schachtel** ist der Durchmesser der großen Röhre: 8 cm.

Die **Tiefe der Schachtel** ist die Länge der Röhren: 10 cm.

### Breite der Schachtel

Wir verbinden die Mittelpunkte der drei Grundkreise der Röhren zu einem Dreieck.

Es ist gleichschenkelig. Die Länge der Basis beträgt 4 cm (zwei Mal der Radius der kleinen Kreise), und die Länge der Schenkel beträgt 6 cm (Summe der Radien 4 cm und 2 cm).

Höhe  $h$  des Dreiecks mit Pythagoras:

$$h = \sqrt{6^2 - 2^2} \text{ cm} = \sqrt{32} \text{ cm} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \approx 5,66 \text{ cm}$$

Die Breite der Schachtel beträgt  $4 \text{ cm} + h + 2 \text{ cm} \approx 11,66 \text{ cm}$  (siehe Skizze der Vorderansicht)

**Die Breite der Schachtel beträgt gerundet 11,66 cm, die Tiefe der Schachtel beträgt 10 cm, und die Höhe der Schachtel beträgt 8 cm.**

### Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Zeichnung

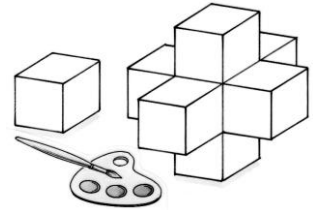
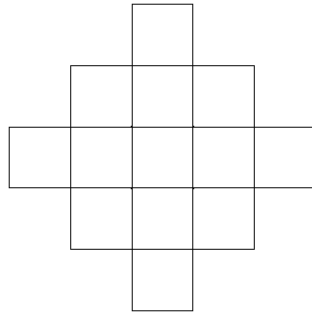
1 Punkt für die Höhe der Schachtel (8 cm)

0,5 Punkte für die Tiefe der Schachtel (10 cm)

3,5 Punkte für die Breite der Schachtel mit Berechnung

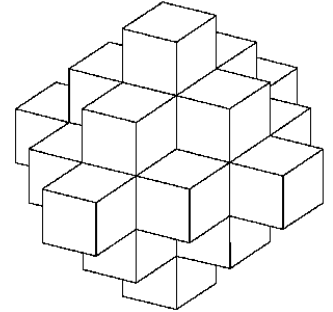
## Aufgabe 6 – Gelb – blau – rot – 5 Punkte –

Vorderansicht des Körpers :



Der Körper, den wir am Ende erhalten, hat fünf Etagen.

- Die erste und die fünfte Etage bestehen jeweils aus einem roten Würfel.
- Die zweite und die vierte Etage bestehen jeweils aus vier roten Würfeln (und einem blauen Würfel).
- Die dritte Etage besteht aus acht roten Würfeln (sowie vier blauen und einem gelben).



Es wurden  $1 + 1 + 4 + 4 + 8 = 18$  rote Würfel aufgeklebt.

Die Vorderansicht des Körpers hat 13 rote Seitenflächen vom Flächeninhalt  $1 \text{ cm}^2$ .

Der Körper hat insgesamt  $6 \cdot 13 = 78$  Seitenflächen vom Flächeninhalt  $1 \text{ cm}^2$ .

**Es wurden 18 rote Würfel aufgeklebt.**

**Der Körper hat insgesamt 78 Seitenflächen.**

**Bewertungsvorschlag:**

1 Punkt für die Vorderansicht

2 Punkte für die Anzahl der roten Würfel (18)

2 Punkte für die Anzahl der Seitenflächen (78)

## Aufgabe 7 – Pack die Badehose ein – 7 Punkte –

Nach einer halben Stunde, als Patricks Vater losfährt, hat Patrick bereits  $0,5 \cdot 12 \text{ km} = 6 \text{ km}$  zurückgelegt.

Sei  $t$  die Zeit in Minuten nach der Abfahrt des Vaters.

Der Vater fährt mit einer Geschwindigkeit von  $60 \text{ km/h}$ , also  $1 \text{ km/min}$ .

Zurückgelegte Strecke des Vaters nach seiner Abfahrt:  $t$  [in km]

Der Sohn fährt mit einer Geschwindigkeit von  $12 \text{ km/h}$ , also  $\frac{1}{5} \text{ km/min}$ .

Zurückgelegte Strecke des Sohnes nach der Abfahrt des Vaters:  $6 + \frac{1}{5} t$  [in km]

Der Vater holt den Sohn ein, wenn beide dieselbe Strecke zurückgelegt haben:

$$t = 6 + \frac{1}{5} t \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5} t = 6 \quad \rightarrow \quad t = 7,5 \text{ [min]}$$

**Patrick hat bereits 6 km zurückgelegt, als sein Vater losfährt.**

**Der Vater braucht 7,5 Minuten, um seinen Sohn einzuholen.**



**Bewertungsvorschlag:**

1 Punkt für die Strecke, die Patrick bereits zurückgelegt hat (6 km)

2 Punkte für die Zeit, die der Vater braucht, um ihn einzuholen (7,5 min)

4 Punkte für die Begründung

*Volle Punktzahl für eine Lösung, die durch Probieren gefunden wurde und gut dokumentiert ist*

## Aufgabe 8 – Selbstbezogen – 5 Punkte –



Die einzigen beiden vierstelligen Zahlen mit den aufgeführten Eigenschaften sind 2020 und 1210.

**Begründung (nicht verlangt)**

**Die Zahl kann nur Ziffern von 0 - 3 enthalten.** Denn wenn eine Ziffer 4 wäre, würde das laut Aufgabentext bedeuten, dass die Zahl 0000, 1111, 2222 oder 3333 wäre. Keine dieser Zahlen enthält aber die Ziffer 4. Größere Ziffern als 4 können nicht auftreten, weil die gesuchte Zahl nur 4 Stellen hat.

**Fallunterscheidung für die Ziffer a**

- **a = 3** bedeutet 3 Ziffern 0 in der Zahl, also **b = c = d = 0**. Aber **d** kann nicht 0 sein, weil die Zahl ja wegen **a = 3** eine Ziffer 3 enthält. -> **a = 3** ist also nicht möglich.

Mit ähnlichen Begründungen kann man zeigen, dass auch **b**, **c**, und **d** nicht 3 sein können.

-> **Die gesuchte Zahl enthält nur Ziffern von 0 - 2.**

- **a = 2** bedeutet 2 Ziffern 0 und  $c \geq 1$ . Also **b = d = 0**.  
**b = 0** bedeutet keine Ziffer 1 in der Zahl => **c = 2**. **Erste Lösung: 2020.**
- **a = 1** bedeutet eine Ziffer 0 in der Zahl. Da die Zahl keine Ziffer 3 enthält, ist **d = 0**.  
Da **a = 1** gilt, ist  $b \geq 1$ . Wäre **b** auch 1, würde die Zahl dann zwei Ziffern 1 enthalten -> Widerspruch.  
Also muss **b = 2** sein, und die Zahl muss noch eine weitere Ziffer 1 enthalten => **c = 1**.  
**Zweite Lösung: 1210**

- **a = 0** ist nicht möglich, denn das würde ja bedeuten, dass die Zahl keine Null enthält.

### **Bewertungsvorschlag:**

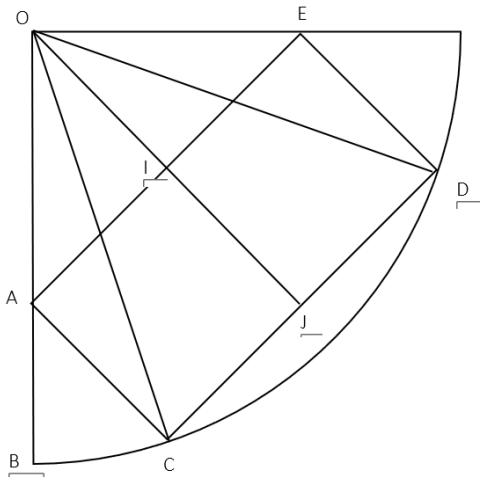
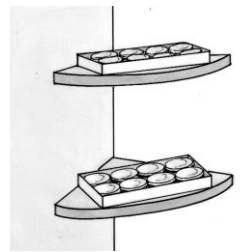
3 Punkte für eine korrekte Lösung

dabei 1 Punkt Abzug für eine oder mehrere falsche Lösungen

5 Punkte, wenn beide Lösungen gefunden wurden

dabei 2 Punkte Abzug für eine oder mehrere falsche Lösungen

## Aufgabe 9 – Patisserie – 7 Punkte –



Wenn die vier Eckpunkte der Schachtel-Grundfläche genau auf dem Rand des Tablett liegen, dann liegt die Schachtel symmetrisch zur Winkelhalbierenden des rechten Winkels im Viertelkreis (in der Zeichnung die Gerade durch O, I und J). Das rechtwinklige Dreieck OAE ist damit gleichschenkelig.

Der Winkel IOA beträgt  $45^\circ$ , und der Winkel AIO ist ein rechter Winkel. Daher beträgt im Dreieck AIO der Winkel bei A auch  $45^\circ$ , und das Dreieck AIO ist gleichschenkelig.

I ist der Mittelpunkt der Strecke AE.

Da das Dreieck AIO gleichschenkelig ist, gilt  $\overline{OI} = \overline{AI} = 10,5$  [cm].

Außerdem gilt  $\overline{OJ} = \overline{OI} + 11 = 10,5 + 11 = 21,5$  [cm]

Der Winkel bei J ist ein rechter Winkel, daher gilt mit Pythagoras  $\overline{OC}^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{JC}^2 = 21,5^2 + 10,5^2$   
 $\overline{OC} = \sqrt{572,5} \approx 23,93$  [cm]

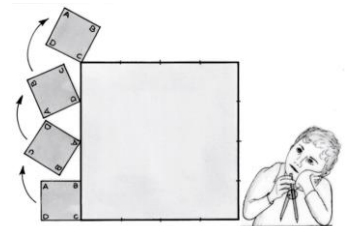
**Der Radius des Viertelkreises beträgt ungefähr 23,93 cm.**

### Bewertungsvorschlag:

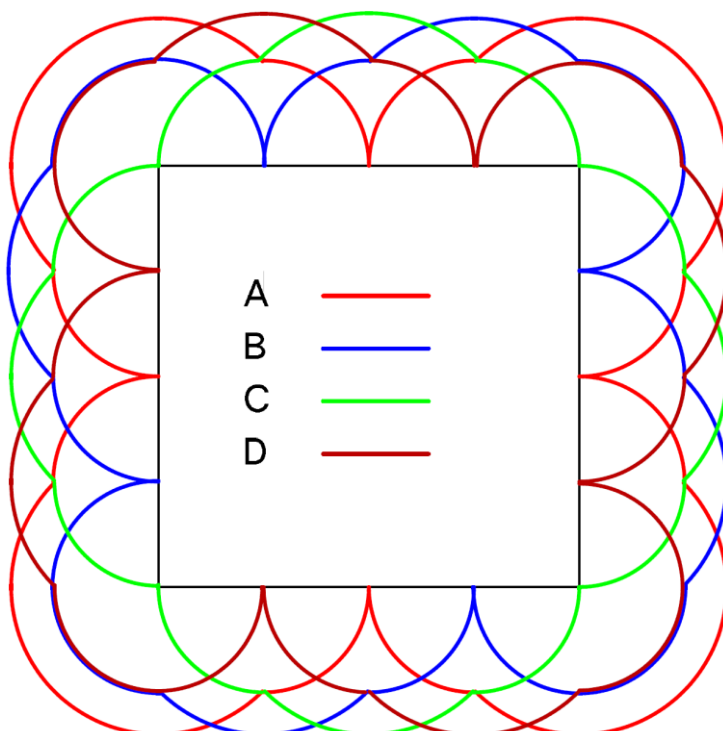
2 Punkte für den Radius

5 Punkte für die Berechnung mit Erklärung

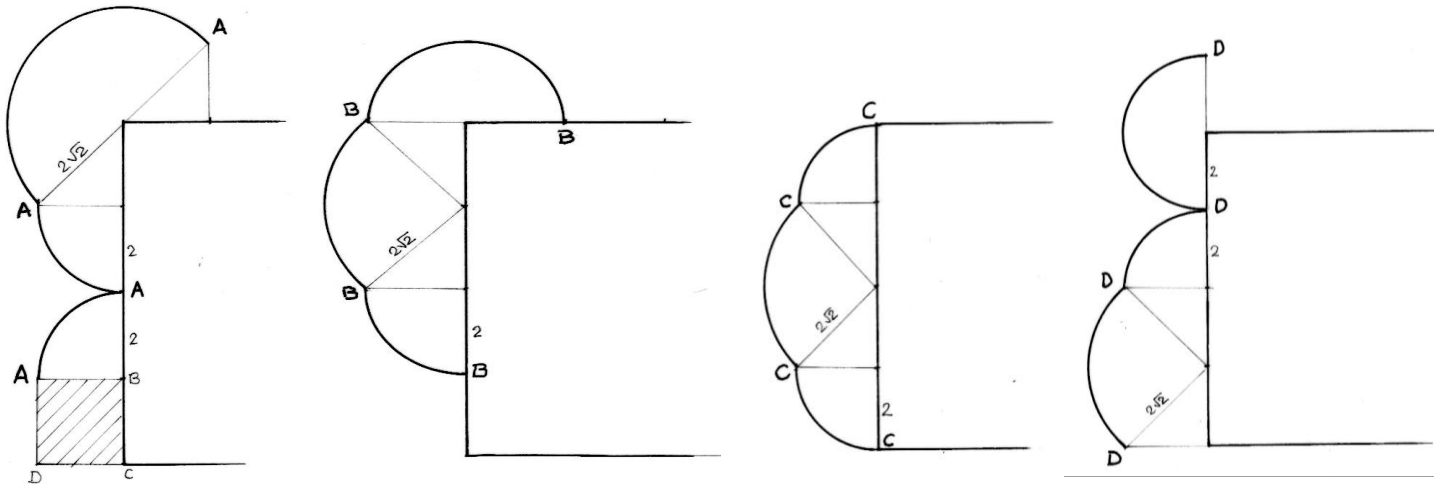
## Aufgabe 10 – Quadratwalzer – 10 Punkte –



**Die Bahnen der vier Eckpunkte**



## Vergleich der Bahnen der vier Eckpunkte



Die Bahn jedes Punktes enthält acht Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm und einen Viertelkreisbogen vom Radius  $r = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ .

Die Bahn von **Punkt A** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius  $2\sqrt{2} \text{ cm}$ .

Die Bahn von **Punkt B** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm.

Die Bahn von **Punkt C** enthält nur die oben aufgeführten Kreisbogenanteile.

Die Bahn von **Punkt D** enthält außerdem vier Viertelkreisbögen vom Radius 2 cm.

-> Der **Punkt C** legt die kürzeste Bahn zurück.

### Berechnung der Länge der Bahn von Punkt C

$$8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi (2 + \sqrt{2}) \approx 42,9 \text{ [cm]}$$

**Die Bahn von Punkt C ist mit etwa 42,9 cm die kürzeste.**

#### Bewertungsvorschlag:

4 Punkte für die Zeichnung (1 Punkt pro Bahn)

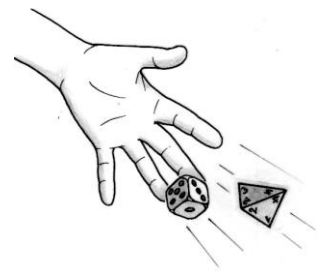
1 Punkt für die Antwort, dass der Punkt C die kürzeste Bahn zurücklegt

3 Punkte für die Begründung

*Eine Begründung über die Berechnung aller 4 Bahnlängen wird akzeptiert.*

2 Punkte für die Berechnung der Länge der Bahn von Punkt C

## Aufgabe 11 – Wer hat Recht? – 5 Punkte –



Für die Augensummen 5 und 6 gibt es jeweils vier Möglichkeiten, für die Augensumme 9 zwei (siehe Auflistung unten).  
Alle Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. -> **Beide haben Recht.**

Summe 5	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
1	4
2	3
3	2
4	1

Summe 9	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
5	4
6	3

Summe 6	
Sechseckiger Würfel	Vierseitiger Würfel
2	4
3	3
4	2
5	1

### Bewertungsvorschlag:

2 Punkte, wenn nur begründet wurde, dass Michaël Recht hat  
2 Punkte, wenn nur begründet wurde, dass Stéphanie Recht hat  
5 Punkte, wenn begründet wurde, dass beide Recht haben



## Aufgabe 12 – KAPREKAR – 7 Punkte –

**Beispiele:** 3 ; 4 ; 5    543 – 345 = 198    0 ; 2 ; 9    920 – 029 = 891  
                                   981 – 189 = 792                                   981 – 189 = 792  
                                   972 – 279 = 693                                   972 – 279 = 693  
                                   963 – 369 = 594                                   963 – 369 = 594  
                                   954 – 459 = 495                                   954 – 459 = 495

7 ; 8 ; 1    871 – 178 = 693  
                                   963 – 369 = 594  
                                   954 – 459 = 495

-> **Unabhängig von der Wahl der Ausgangsziffern erhält man spätestens nach fünf Durchgängen bei jedem weiteren Durchgang die Zahl 495. (die sogenannte Kaprekar-Konstante)**

-> **Kaprekar nennt seinen Freunden die Zahl 495.**

Seien a, b und c drei verschiedene Ziffern mit  $a < b < c$ .

Größtmögliche Zahl mit diesen Ziffern:  $100c + 10b + a$ .

Kleinstmögliche Zahl mit diesen Ziffern:  $100a + 10b + c$ .

Differenz:  $(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99(c - a)$  -> **Diese Differenz ist ein Vielfaches von 99.**

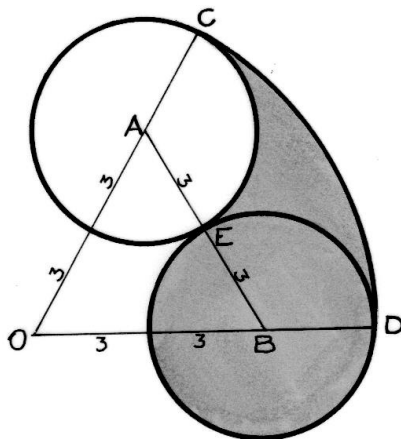
*Bemerkung (nicht verlangt): Für den Beweis, dass der Algorithmus tatsächlich immer auf die Zahl 495 führt, genügt es also, diese Behauptung für alle maximal dreistelligen Vielfachen von 99 nachzuweisen. (also 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990)*

*Tatsächlich führt der Algorithmus bei diesen Zahlen immer auf die Zahl 495.*

### Bewertungsvorschlag:

2 Punkte für die Beispiele (mindestens zwei)  
2 Punkte für die Zahl, die Kaprekar nennt: 495  
3 Punkte für den Beweis, dass alle Ergebnisse Vielfache von 99 sind

## Aufgabe 13 – Tropfen – 10 Punkte



Hier eine mögliche Lösung:

Die graue Figur besteht aus einem Kreis mit Radius 3 cm und einer Teilfigur, die von drei Kreisbögen begrenzt wird – zwei Kreisbögen um A und B vom Radius 3 cm und einem Kreisbogen um O mit Radius 9 cm.

Der Kreis um B mit Radius 3 cm hat den Flächeninhalt  $\pi \cdot (3\text{cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

Der Flächeninhalt der zweiten Teilfigur, die von den drei Kreisbögen begrenzt wird, lässt sich folgendermaßen berechnen:

Man berechnet den Flächeninhalt des Kreisausschnitts ODC und zieht davon den Flächeninhalt des Dreiecks OBA sowie den Flächeninhalt der beiden Kreisausschnitte AEC und BDE ab.

Flächeninhalt des Kreisausschnitts ODC mit dem Öffnungswinkel  $60^\circ$ :

$$\frac{\pi \cdot (9\text{cm})^2}{6} = \frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks OBA:

$$\frac{6 \text{ cm} \cdot \sqrt{(6\text{cm})^2 - (3\text{cm})^2}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der Kreisausschnitte AEC und BDE (Öffnungswinkel jeweils  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ):

$$\frac{\pi \cdot (3\text{cm})^2}{3} = 3\pi \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der zweiten Teilfigur:

$$\frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2 - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 - 2 \cdot 3\pi \text{ cm}^2 = \frac{15\pi}{2} \text{ cm}^2 - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der grauen Figur:

$$9\pi \text{ cm}^2 + \frac{15\pi}{2} \text{ cm}^2 - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 = \frac{33\pi}{2} \text{ cm}^2 - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 36,25 \text{ cm}^2$$

**Der Flächeninhalt der grauen Figur beträgt  $\frac{33\pi}{2} \text{ cm}^2 - 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 36,248 \text{ cm}^2$ .**

### Bewertungsvorschlag:

Im Ermessen des Korrektors/ der Korrektorin  
Teilpunkte für richtige Lösungsansätze