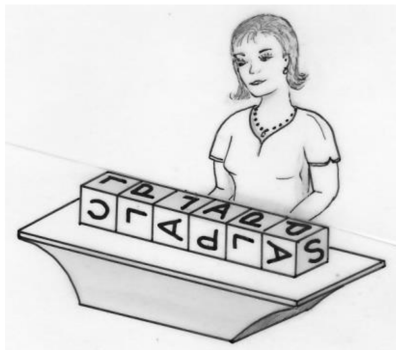
Hauptwettbewerb 2023
Lösungshinweise
Bewertungsvorschlag

Aufgabe 1 – Galant teilen – 7 Punkte -

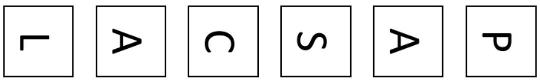
Etiennes Strategie ist die „Strategie des Quadrats“: Die Idee ist es, dem Gegner immer ein Quadrat zu übergeben. Zuerst übergibt Étienne Gus ein Quadrat aus 4×4 Schokoladenstücken, dann eines aus 3×3, dann eines aus 2×2 und schließlich eines aus 1×1 Schokoladenstücken – das letzte Stück.

Bewertungsvorschlag
3 Punkte für die sprachliche Qualität 4 Punkte für die Lösung mit Erklärung Jeder sinnvolle Lösungsversuch wird mit mindestens 2 Punkten bewertet.

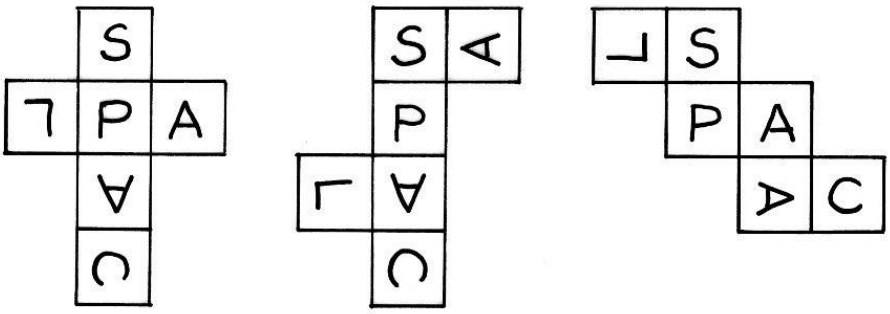
Aufgabe 2 – Auf ihrer Seite – 5 Punkte -



Sophie sieht folgendes:



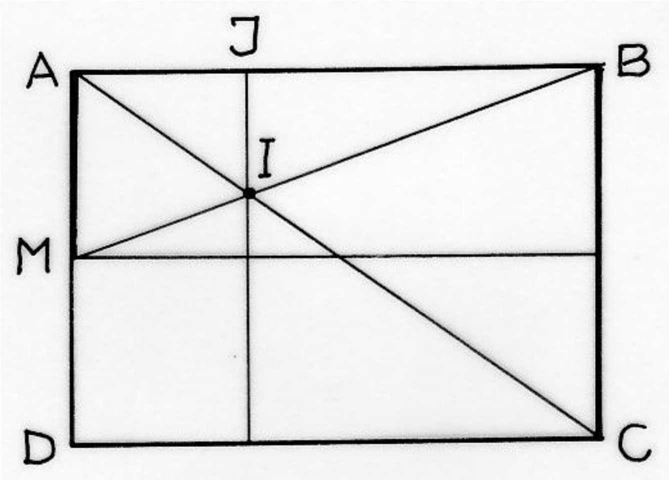
Hier sind drei mögliche Netze der Würfel.

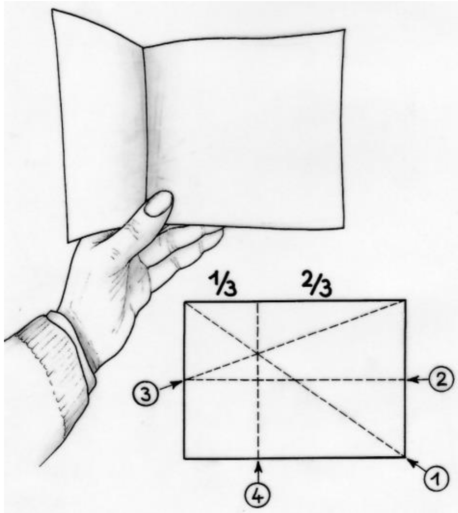


Bewertungsvorschlag
3 Punkte für eine korrekte Zeichnung dessen, was Sophie sieht 2 Punkte für ein korrektes Netz mit richtig orientierten Buchstaben Teilpunkte für nur teilweise richtige Lösungen; davon ein Punkt, wenn das Wort PASCAL erkannt wurde.

Mathématiques sans Frontières

Aufgabe 3 – Faltend teilen – 7 Punkte -





Die Rechteckseiten AD und BC sind parallel und werden von der Mittelparallele halbiert.
Mit den Strahlensätzen gilt

$$\frac{AM}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{AI}{IC}$$

Also ist IC = 2 AI und AC = 3 AI.
AC = 3 AI ist gleichbedeutend mit

$$\frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$$

Die Strecken JI und BC sind parallel, und mit den Strahlensätzen gilt

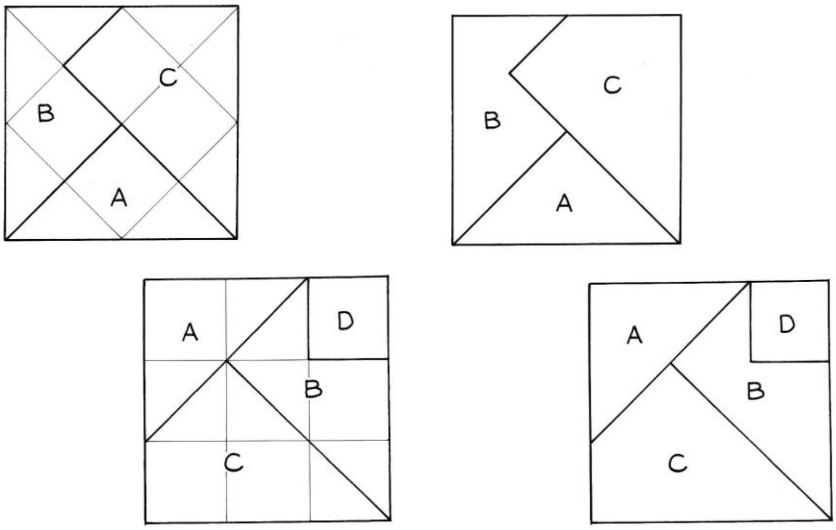
$$\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$$

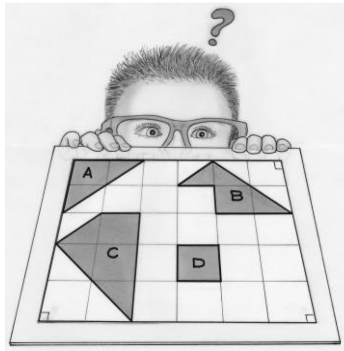
und damit

$$AJ = \frac{1}{3}\,AB$$

Bewertungsvorschlag
1 Punkt für das richtig gefaltete Blatt je 2 Punkte für eine richtige Anwendung der Strahlensätze (2 Punkte bei der einen und 2 Punkte bei der anderen Figur) Weitere 2 Punkte, wenn der Beweis vollständig ist. Jede andere korrekte Lösung erhält die volle Punktzahl. Jeder sinnvolle Lösungsversuch wird mit mindestens 2 Punkten bewertet.

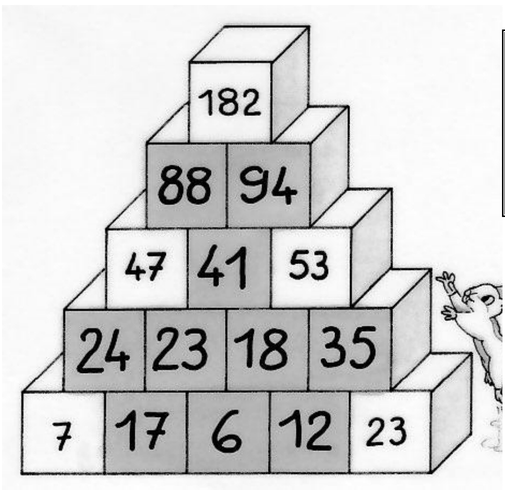
Aufgabe 4 – Doppelpuzzle – 5 Punkte -





Bewertungsvorschlag
2 Punkte für das erste Quadrat 3 Punkte für das zweite Quadrat

Aufgabe 5 – Rechenmauer – 7 Punkte -



Bewertungsvorschlag
Je 1 Punkt für die drei oberen Zahlen (88, 94,41) 2 Punke für die drei unteren Zahlen 2 Punkte für die vier Zahlen in der zweiten Reihe (24, 23, 18, 35)

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 6 – Streichhölzer– 5 Punkte -

Bewertungsvorschlag
5 Punkte für die richtige Lösung mit Erklärung Bei falscher Lösung ein Punkt für jede Information, die richtig ausgewertet wurde, aber maximal 3 Punkte

Sei n die Anzahl der Streichhölzer.

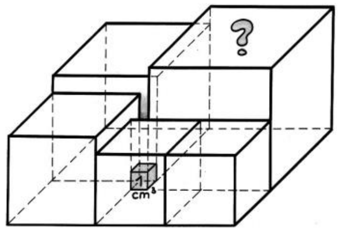
Man entnimmt
- der ersten Information: n ist ungerade.
- der vierten Information: Die Endziffer von n ist 4 oder 9.
  (Rest 4 bei Division durch 5).
  Da n ungerade ist, ist die Endziffer also 9.
- Der sechsten Information: n ist ein Vielfaches von 7.

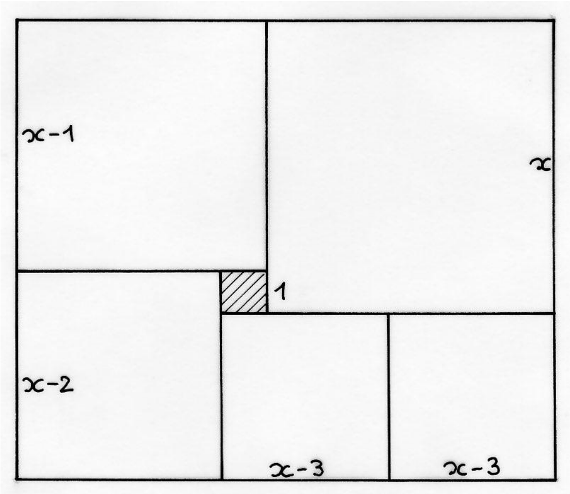
Die ersten Vielfachen von 7 mit der Endziffer 9 sind 49, 119, 189, …
n kann nicht 49 sein, denn bei Division von 49 durch 3 ist der Rest 1 und nicht 2 (siehe Information 2).
119 erfüllt alle Anforderungen.

Auf dem Boden liegen mindestens 119 Streichhölzer.

Aufgabe 7 – Eingeklemmt – 7 Punkte -

Mathématiques SANS Frontières





Die Grundseite der Figur ist ein Rechteck, das in sechs Quadrate unterteilt ist (die Grundseiten der sechs Würfel).
Die Kantenlänge des kleinen Würfels beträgt 1 cm.
Sei x die Kantenlänge des größten Würfels in cm.
Dann sind die Kantenlängen der vier anderen Würfel in cm $x-1,\ x-2,\ x-3$ und $x-3$.
In dem Rechteck sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. Es gilt also $x+(x-1)=(x-2)+2\,(x-3)$

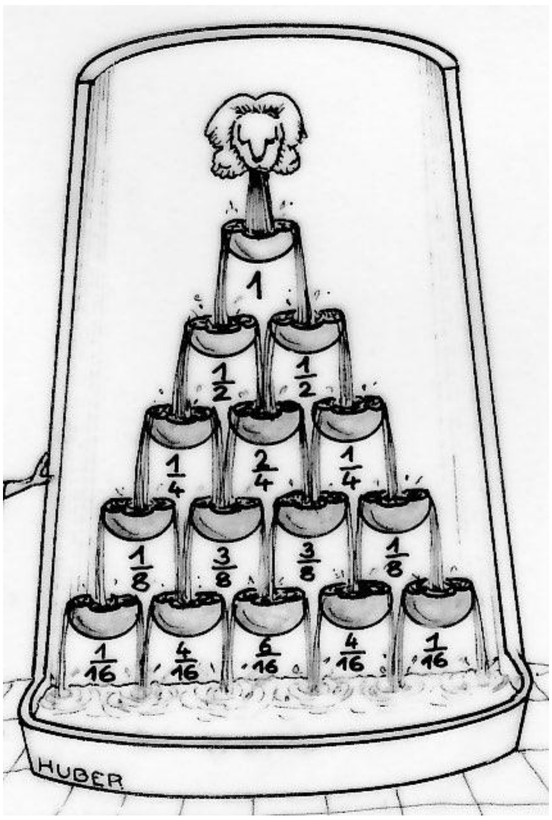
$$2\,x-1 = 3x-8$$

$$x=7$$

Volumen des größten Würfels: $7^3 cm^3 = 343\ cm^3$.

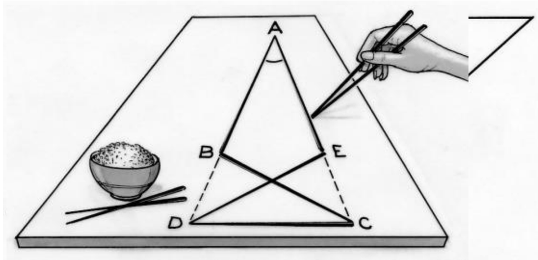
Bewertungsvorschlag
6 Punkte für eine korrekte Berechnung der Kantenlänge des größten Würfels Teilpunkte für richtige Lösungsansätze 1 Punkt für das Volumen des größten Würfels 3 Punkte, falls die richtige Lösung ohne Berechnung gefunden wurde (durch Probieren zum Beispiel)

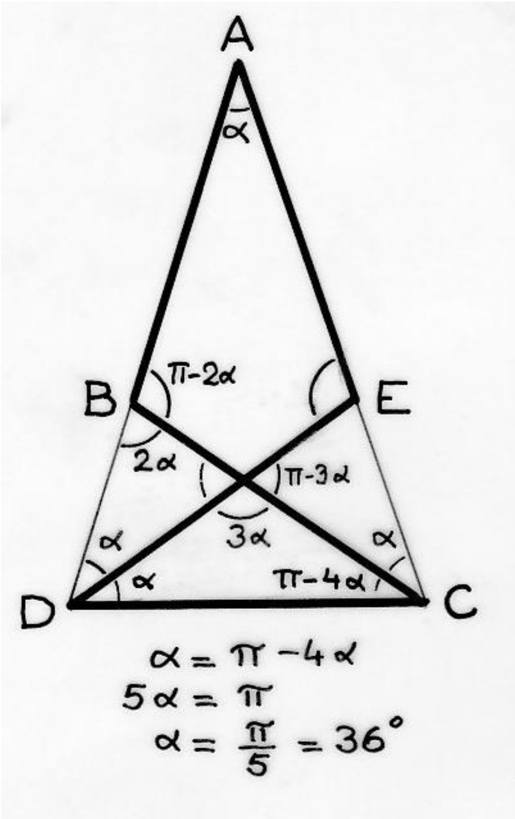
Aufgabe 8 – Alles fließt – 5 Punkte -



Bewertungsvorschlag
1 Punkt für die drei obersten Gefäße (Reihen 1 und 2) 1 Punkt für Reihe 3 1 Punkt für Reihe 4 2 Punkte für die unterste Reihe (Reife 5)

Aufgabe 9 – Mit Stäbchen – 7 Punkte -





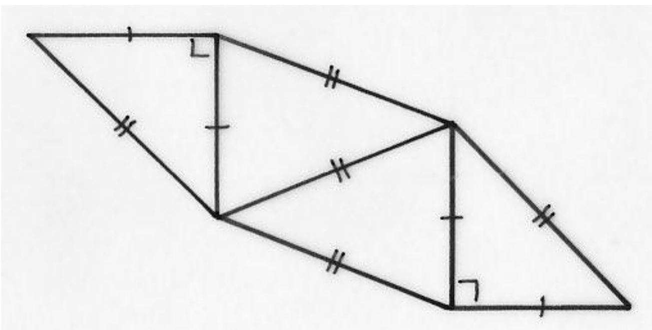
- Da die fünf Stäbchen gleich lang sind, sind die gleichschenkligen Dreiecke DEA (mit Basis DA) und BCA (mit Basis CA) kongruent. Ihr Basiswinkel sei α. (I)
- Im Dreieck BCA beträgt der Innenwinkel bei B $180° - 2\alpha$.
- Der Nebenwinkel von $180° - 2\alpha$ beträgt 2α. Im Dreieck DCB ist das die Weite des Innenwinkels bei B. Dieses Dreieck ist gleichschenklig, daher misst der Innenwinkel bei D auch 2α.
- Mit (I) misst der Winkel CDE also $2\alpha - \alpha = \alpha$
- Wegen der Symmetrie der Figur beträgt die Weite des Winkels BCD auch α (in der Zeichnung steht $\pi - 4\alpha$, das stimmt auch).

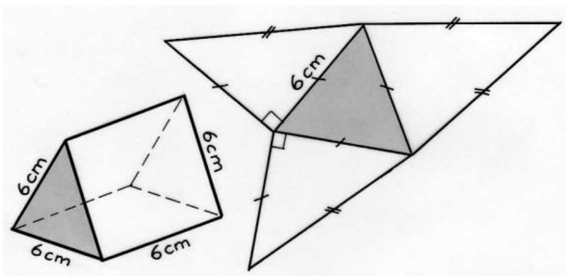
Mit der Winkelsumme im Dreieck DCA ergibt sich:

$$\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 180$$
$$5\,\alpha = 180°$$
$$\alpha = \frac{180°}{5} = \mathbf{36}°$$

Bewertungsvorschlag
Es gibt viele Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Eine weitere zeigt die Zeichnung. Jede korrekte Lösung, die gut dokumentiert ist, erhält die volle Punktzahl. Sinnvolle Lösungsansätze erhalten Teilpunkte.

Aufgabe 10 – Die dritte Pyramide – 10 Punkte





Bewertungsvorschlag
je 2 Punkte für jede korrekte Seitenfläche 2 Punkte für die Sorgfalt der Darstellung Für einen sinnvollen Lösungsansatz mindestens zwei Punkte

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 11 – Nachhaltig – 5 Punkte -

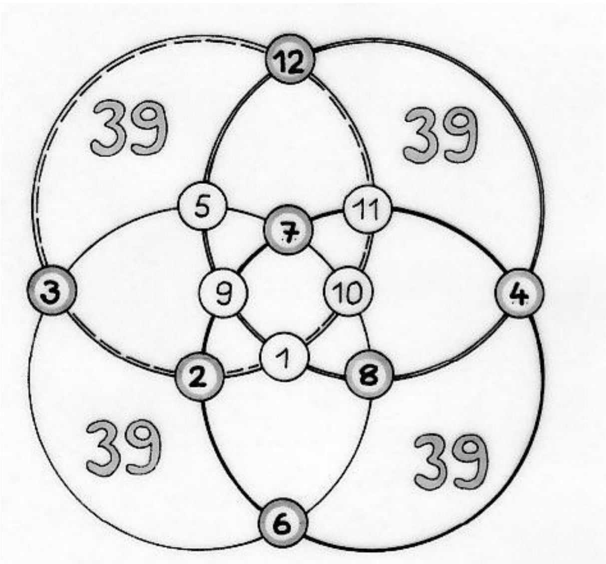
Sei n die gesuchte Anzahl der Knoblauchzehen.
Wenn Richard jedes Jahr n Knoblauchzehen pflanzt, erhält er bei der Ernte n Knollen, also 6n Zehen.
Diese 6n Zehen sind genauso viele wie die Knoblauchzehen, die er zum Kochen braucht ($30 \cdot 6$) und die n Zehen, die er wieder einpflanzt, zusammen.
Es gilt also die Gleichung $6n = 30 \cdot 6 + n$. Man erhält **$n = 36$**.
Richard muss jedes Jahr 36 Knoblauchzehen einpflanzen.

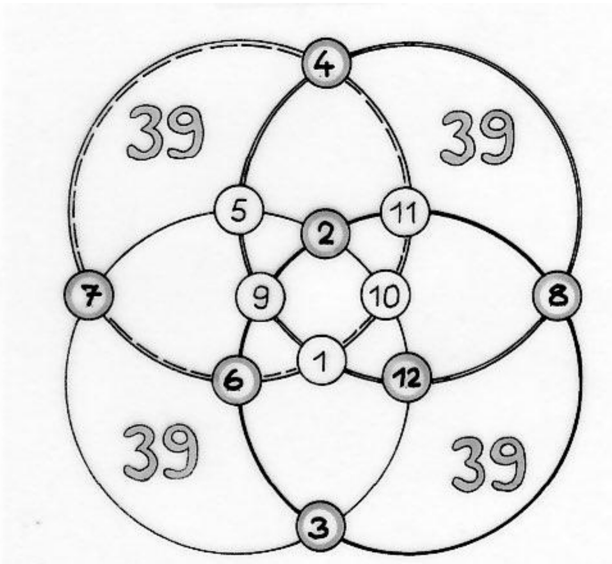
Diese Aufgabe kann auch durch Probieren oder mit Tabellen gelöst werden.

Bewertungsvorschlag
5 Punkte für eine richtige Lösung mit Erklärung (mit einer Gleichung, durch Probieren, mit Tabellen…)

Aufgabe 12 – Eingekreist – 7 Punkte -

Es gibt 4 mögliche Lösungen.



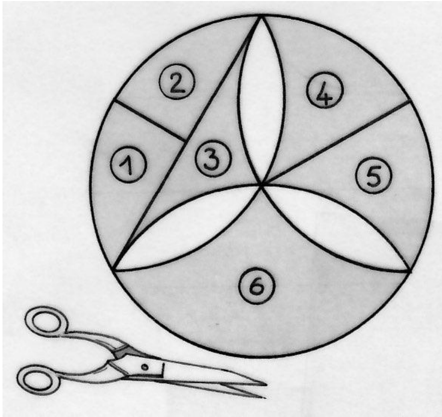


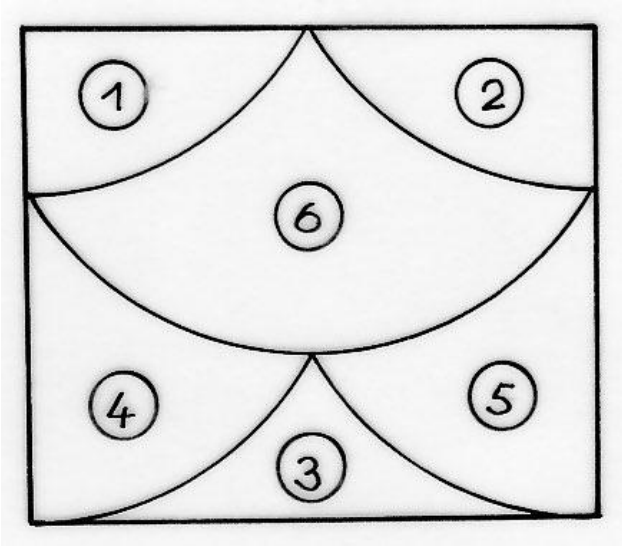
weitere Lösung: 7 und 6 vertauschen

weitere Lösung: 2 und 3 vertauschen.

Bewertungsvorschlag
1 Punkt für jede Zahl

Aufgabe 13 - Kein π, ja wie? *–10* **Punkte -**





Wenn man bei Teil 2 die beiden Eckpunkte, die auf der Kreislinie liegen, miteinander verbindet, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck. Seine Hypotenuse ist 6 cm lang (eine Seite des regelmäßigen Sechsecks), und die Winkel, die die Katheten jeweils mit der Hypotenuse einschließen, betragen 60° und 30°.

Für die Seitenlänge a der kurzen Kathete in diesem Dreieck gilt:
$\frac{a}{6\ cm}$ = cos (60°) => a = 3cm.

Mit Pythagoras folgt dann für die andere Kathete b: b = $\sqrt{6^2 - 3^2}$ cm = $\sqrt{27}$ cm = $3\sqrt{3}$ cm

Die eine Seite des oben abgebildeten Rechtecks ist also $2 \cdot 3\sqrt{3}$ cm = **$6\sqrt{3}$ cm** lang.

Die andere Seite ist 3 cm + 6 cm = **9 cm** lang.

Die graue Fläche ist gleich der Rechtecksfläche: **$54\sqrt{3}$ cm².**

Bewertungsvorschlag
2 Punkte für die richtigen Puzzleteile 3 Punkte für das gepuzzelte Rechteck je 2 Punkte für jede Rechteckseite 1 Punkt für den Flächeninhalt

Mathématiques SANS Frontières